МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
РАДІОЕЛЕКТРОНІКИ

ПЕРШИНА ЮЛІЯ ІГОРІВНА

УДК 519.876.5

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ В КОМП'ЮТЕРНІЙ ТОМОГРАФІЇ З ВИКОРИСТАННЯМ ІНТЕРФЛЕТАЦІЇ ФУНКЦІЙ

01.05.02 – Математичне моделювання та обчислювальні методи

Автореферат

дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Харків – 2007

Дисертацією є рукопис

Робота виконана в Українській інженерно-педагогічній академії, м. Харків, Міністерство освіти і науки України.

Науковий керівник: доктор фізико-математичних наук, професор
Литвин Олег Миколайович,
Українська інженерно-педагогічна академія (м. Харків), завідувач кафедри прикладної математики

Офіційні опоненти: доктор фізико-математичних наук, професор
Недашковський Микола Олександрович,
Тернопільський національний економічний університет, завідувач кафедри автоматизованих
систем і програмування

доктор фізико-математичних наук, професор
Новожилова Марина Володимирівна,
Харківській державний технічний університет будівництва та архітектури, завідувач кафедри комп'ютерного моделювання та інформаційних технологій

Провідна організація: **Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України,**
Відділ програмного забезпечення та рішення задач (м. Київ)

Захист відбудеться "_22_" __березня___2007 року о _14__ годині на засіданні Спеціалізованої вченої ради К64.052.07 при Харківському національному університеті радіоелектроніки: 61166, м.Харків, просп. Леніна, 14

З дисертацією можна ознайомитися в бібліотеці Харківського національного університету радіоелектроніки: 61166, м.Харків, просп. Леніна, 14

Автореферат розісланий "_16_" __лютого______ 2007 р.

Учений секретар
спеціалізованої вченої ради, Гребеннік І.В.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Остання чверть 20-го століття ознаменувалась появою, інтенсивним розвитком і широким впровадженням одного з видатних досягнень людства – комп'ютерної томографії. В основі комп'ютерної томографії лежать теоретичні результати німецького вченого Й. Радона, який ще на початку 20-го століття розвинув теорію перетворення функцій багатьох змінних (це перетворення тепер називається перетворенням Радона). Згідно з цим перетворенням функцію багатьох змінних можна характеризувати не тільки її значеннями у точках багатовимірного простору, але також інтегралами від цієї функції, взятими по нескінченній сукупності ліній або площин (якщо кількість змінних більше двох). На практиці інформація про функцію може бути отримана тільки у вигляді фіксованого числа вказаних інтегралів, отриманих по деякій скінченій множині ліній або поверхонь. Тому практична реалізація ідей Й. Радона у вигляді комп'ютерних томографів, що використовують опромінення об'єкта рентгенівськими променями, з'явилась лише в кінці 20-го століття. За останні три десятиліття комп'ютерна томографія зробила потужні кроки у напрямку удосконалення алгоритмів, програмних засобів та апаратної реалізації. Значно зросла швидкість, точність та якість візуалізації перетинів досліджуваного тіла на екранах моніторів комп'ютерних томографів. Розвиваються нові напрямки комп'ютерної томографії, в основі яких лежать дещо інші підходи, ніж ті, що витікають безпосередньо з праць Й. Радона – магнітно-резонансна томографія, ультразвукова томографія, оптична томографія та інші види томографічного відновлення, які можуть не використовувати опромінення об'єкта рентгенівськими променями.

Відзначимо, що крім Й. Радона у розвиток комп'ютерної томографії значний вклад внесли Хермен Г., Хелгасон С., Луїтт Р.М., Наттерер Ф., Рубашов І.Б., Тихонов А.Н., Арсенин В.Я., Тимонов А.А., Терновой К.С., Синьков М.В., Закидальский А.И., Губарени Н.М., Гельфанд И.М., Граев М.И., Виленкин Н.Я., Лундин А.Г., Федин Э.И., Алексеев А.С., Лаврентьєв М.М., Преображенский Н.Г., Хаунсфилд Г.Н., Кормак А.М, Bracewell R.N. Riddle A.C., Cormack A.M., Hounsfield G.N., Shepp L.A., Logan B.F., Gordon R., Bender R., Herman G.T., Gottlieb D., Gustafsson B., Введенская Н.Д. и Гиндикин С.Г., Воскобойников Ю.Е., Пикалов В.В., Седельников А.И., Kruger P.P., Morris R.A., Wecksung G.W., Троицкий И.Н., Чернов Е.И., Гончар С.И., Попов А.Д., Лент Р.М., Луис А.К., Пикалов В.В., Deans S.R., Richard J., Трофимов О.Є., Литвин О.М., Кравченко В.П. та інші.

Не дивлячись на значні успіхи в комп'ютерній томографії, практична реалізація томографічного методу ще далека від оптимальності. Однією з основних причин, які підтверджують таке твердження є недостатньо обґрунтована кількість проекцій (даних Радона), яку використовують сучасні рентгенівські комп'ютерні томографи для відновлення об'єкту у заданому перетині (тобто не обґрунтована доза опромінення об’єкта). Друга причина полягає у тому, що сучасні комп’ютерні томографи (не тільки рентгенівські) при відновленні об’єкта у заданому перетині демонструють на екранах дисплеїв артефакти – не властиві реальному об’єкту структури - тіні, нечіткість зображення, вкраплення тощо.

У практиці дослідження томографічних зображень часто виникає задача отримання зображення перетину тіла у тих площинах, для яких немає зображення, за відомими зображеннями у деякій сукупності перетинів. Аналогічна задача виникає зокрема при дослідженні кори головного мозку піддослідних тварин.

Існують сучасні програмні пакети, такі як Adobe Illustrator, Digital Anatomy, 3D Max, в яких можна отримати перерізи тривимірного тіла. Підкреслимо, що ці програмні пакети відновлюють внутрішню структуру тривимірного тіла за допомогою томограм, які лежать на площинах, паралельних одній площині. Тобто ці програмні пакети не дають можливість знайти перетин тривимірного поля за даними проекціями, отриманими при перетині тіла системою будь-яких перерізаних площин.

Сучасна обчислювальна математика на даний час приділяє значну увагу розвиткові оптимальних, або близьких до оптимальних методів відновлення функцій однієї та багатьох змінних за допомогою скінченого числа експериментальних даних про ці функції. Це стосується також і комп’ютерної томографії.

Таким чином, актуальною є розробка і дослідження методу відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла за відомими його томограмами, що лежать в системі трьох перерізаних площин. Під виразом „відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла” надалі будемо вважати відновлення просторово змінного коефіцієнта поглинання всередині тривимірного тіла.

Зв′язок з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконувалася на кафедрі прикладної математики Української інженерно – педагогічної академії. Як виконавець здобувач проводив дослідження у рамках держбюджетної теми № 04-02 ДБ “Високоефективні методи розв′язання плоскої та просторової задач комп′ютерної томографії на основі використання інтерлінації та інтерфлетації функцій” (№ ДР 0104U000940), яка входить до плану НДР кафедри прикладної математики Української інженерно – педагогічної академії.

Мета і задачі дослідження. Метою даного дисертаційного дослідження є розробка методу відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла за відомими зображеннями перетинів цього тіла, заданими у вигляді фотографій або томограм, що поступають з комп’ютерного томографа. Ці фотографії або томограми є зрізами тривимірного тіла в заданій системі перерізаних площин.

Для досягнення сформульованої мети в процесі досліджень поставлені та розв′язані наступні задачі:

- розробка та дослідження методу відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла за відомими зображеннями його перетинів, заданими у вигляді томограм в системі взаємно перпендикулярних площин, при математичному моделюванні в комп'ютерній томографії;
- розробка та дослідження алгоритму відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла за відомими зображеннями його перетинів, заданими у вигляді томограм в системі будь – яких перерізаних площин;
- розробка та дослідження алгоритму переведення зображення томограми у функціональну залежність, аргументами якої є номер томограми та координати пікселей;
- створення пакету програм для реалізації і тестування запропонованих алгоритмів.

Об'єктом даного дослідження є процес відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла у заданій площині на основі даних томограм, що поступають з комп'ютерного томографа.

Предметом дослідження є математичне моделювання в комп'ютерній томографії.

Методи дослідження. При виконанні даного дослідження використані поняття математичного моделювання в комп'ютерній томографії, методи функціонального аналізу, методи наближення операторами сплайн - інтерфлетації та поліноміальної інтерфлетації функцій трьох змінних; системи комп'ютерної математики Matlab, Mathcad при тестуванні розроблених алгоритмів.

Наукова новизна отриманих результатів полягає у такому. Результатом дослідження є розвиток теорії наближення функцій трьох змінних операторами поліноміальної та сплайн – інтерфлетації та створення на цій основі загального підходу до математичного моделювання в комп'ютерній томографії. Одержані результати є теоретичною основою методології розв'язання просторової задачі комп'ютерної томографії, в тому числі:

- вперше побудовано оператор поліноміальної інтерфлетації функції від трьох змінних на системі трьох груп перерізаних площин, який дозволяє наблизити функцію трьох змінних, якщо інформація про неї задана слідами на площинах, не обов'язково взаємно перпендикулярних;
- вперше отриманий та досліджений новий метод відновлення внутрішньої структури тривимірного об'єкта за допомогою сплайн – інтерфлетації функцій від трьох змінних, який дозволяє відновити зображення об'єкта, якщо відомі його проекції (томограмами), що лежать в системі взаємно перпендикулярних площин, з більш високою точністю, ніж класичні методи;
- вперше отриманий та досліджений метод відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла з використанням поліноміальної інтерфлетації функції від трьох змінних, який дозволяє відновити зображення внутрішньої структури об'єкта, якщо відомі його проекції

(томограми) в системі трьох груп перерізаних площин (в кожній групі площини паралельні).

Теоретичне значення роботи. Дисертантом розроблений новий метод розв'язання тривимірної задачі комп'ютерної томографії, яка полягає у відновленні внутрішньої структури тривимірного об'єкта за відомими його томограмами на системі трьох груп перерізаних площин. Всі теоретичні результати подані у вигляді визначень, теорем, властивостей, описів алгоритмів, що в значній частині приводяться вперше.

Практичне значення отриманих результатів. Наукові результати дисертаційної роботи є подальшим розвитком теорії наближення функцій операторами інтерфлетації. Результати роботи дозволяють створювати нові математичні моделі комп'ютерної томографії. Крім того, в роботі дається означення томограми в математичному сенсі, як слід від функції трьох змінних на заданій площині, що дає можливість працювати з томограмами, як з функціями.

Результати данного дослідження можуть бути ефективно використані в сучасних комп'ютерних томографах медичного призначення. Крім того, їх можна використати при неруйнівному контролі на митницях, коли інформація про досліджуваний об'єкт отримується в двох або тьрох різних напрямках.

Методи, запропоновані в дисертаційній роботі, впроваджено в держбюджетну науково-дослідну роботу та в навчальний процес Української інженерно – педагогічної академії (акт від 25.05.2006 р.)

Особистий внесок здобувача.

Всі результати дисертаційної роботи отримані особисто дисертантом. У роботах, опублікованих у співавторстві, дисертанту належать наступні результати. В роботі [1] дисертантом отриманий загальний вигляд оператора сплайн – інтерфлетації, який відновлює внутрішню структуру тривимірного об'єкту на системі взаємно – перпендикулярних томограм. У роботах [7], [2], [3] дисертантом проведено доведення основної теореми, створено комплекс програм у системі комп'ютерної математики Matlab, проведено обчислювальний експеримент, дисертант приймала участь у аналізі результатів обчислювального експерименту. У роботі [4] дисертантом проведено доведення основних теорем, створено комплекс програм у системі комп'ютерної математики Matlab, проведено обчислювальний експеримент, дисертант приймала участь у аналізі результатів обчислювального експерименту. У роботах [5], [6] дисертантом отриманий загальний вигляд оператора сплайн - інтерфлетації, який відновлює внутрішню структуру тривимірного тіла на системі трьох груп перерізаних площин, створено комплекс програм для перевірки основних теоретичних тверджень, дисертант приймала участь у проведенні та аналізі обчислювального експерименту.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційної роботи доповідались на науковій конференції УІПА (м. Харків, 4-9 лютого 2004 р.); науковій конференції Укробраз (м. Київ, жовтень 2004 р.); міжнародній конференції ім. академіка Кравчука (м. Київ, 19- 21 травня 2004 р); міжнародній школі „Питання оптимізації обчислень ХХХІ” (м. Кацивелі, 19-23 вересня 2005 р.); семінарі з обчислювальної та прикладної математики (2001, 2002, 2003, 2004, 2005рр) при кафедрі прикладної математики УІПА; інтернаціональній конференції „Signal and Image processing” (Новосибірськ, 2005р.); конференції молодих вчених та спеціалістів (Інститут проблем машинобудування, грудень 2005р., м. Харків).

Публікації. За темою дисертації опубліковано 10 праць, в тому числі 3 статті в наукових журналах та збірниках наукових праць, які входять до переліку ВАК України, 1 стаття в іноземному журналі, 6 доповідей та тез, опублікованих в матеріалах наукових конференцій.

Структура та обсяг роботи. Дисертація містить вступ, три розділи, висновки по роботі, 5 додатків, 32 рисунка, 2 таблиці та список використаних джерел з 123 найменувань на 10 сторінках. Повний обсяг дисертації складає 184 с., з них 139 с. основного тексту.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступній частині** обґрунтовано актуальність теми дисертації, показано її наукову спрямованість, сформульовано мету роботи та задачі дослідження, які потрібно вирішити для її досягнення. Подано коротку характеристику результатів дослідження, ступеню їх апробації та опублікування.

В **першому розділі** розглянуті основні відомі алгоритми двовимірної комп’ютерної томографії та методи розв’язання задач тривимірної томографії. З використанням методів відновлення, згаданих в першому розділі, можна відновити внутрішню структуру тривимірного тіла за відомими томограмами, які лежать на площинах, паралельних одній площині. Тобто з використанням цих методів не можна знайти перетин тривимірного тіла за даними проекціями, отриманими при перетині тіла системою будь-яких перерізаних площин.

У **другому розділі** проведені дослідження методів відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла на системі його проекцій (томограм), які лежать на системі трьох груп перерізаних площин.

Пропонується метод відновлення зображення розподілу просторово змінного коефіцієнта поглинання $f(x),\ x=(x_2,x_2,x_3)$ всередині тривимірного тіла. Джерелом інформації про функцію $f(x)$, тобто про коефіцієнт поглинання всередині тривимірного тіла (надалі, внутрішню структуру), будемо вважати набір площин, а також набір томограм на цих площинах. Доводяться основні твердження та теореми.

Нехай задані три групи томограм. В кожній групі томограми лежать на паралельних площинах. Томограми розташовуються на площинах, які задаються рівняннями наступного вигляду. Група площин $\Pi 1$ задається рівняннями: $\omega 1_i(x)=\sum\limits_{p=1}^{3} a_{ip}x_p-\gamma 1_i \;\; i=\overline{1,n}$, група $\Pi 2$ задається рівняннями $\omega 2_k(x)=\sum\limits_{p=1}^{3} b_{kp}x_p-\gamma 2_k \,, k=\overline{1,m}$ і група $\Pi 3$ задається так: $\omega 3_l(x)=\sum\limits_{p=1}^{3} c_{lp}x_p-\gamma 3_l, \quad l=\overline{1,s}$, де n,m,s - кількість паралельних площин в групах $\Pi 1$, $\Pi 2$, $\Pi 3$ відповідно, числа $\gamma 1_i, \gamma 2_k, \gamma 3_l$, a_{ip}, b_{kp}, c_{lp} задані. Вважаємо, що в кожній групі площини паралельні між собою, тобто $a_{ip}=a_{i'p}$, $b_{kp}=b_{k'p}$, $c_{lp}=c_{l'p}$, $\quad i\neq i',\, k\neq k',\, l\neq l'$. Вводяться наступні позначення:

$$\tau_{ik}^{\omega 1,\omega 2}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} \\ b_{k1} & b_{k2} & b_{k3} \end{vmatrix};$$

$\tau_{ik}^{\omega 1,\omega 2}$ – вектор, направлений вздовж лінії перетину площин $\omega 1_i$, $\omega 2_k$.

$$M=\{(i,k,l)\,|\,\Pi 1_i\cap\Pi 2_k\cap\Pi 3_l=V_{ikl}=(x_{ikl1},x_{ikl2},x_{ikl3})\neq\emptyset,\; i\neq k\neq l\},$$
$$\Gamma_{ik}=A_i\cap B_k\neq\emptyset,\;\Gamma_{il}=A_i\cap C_l\neq\emptyset,\;\Gamma_{kl}=B_k\cap C_l\neq\emptyset,$$

де A_i - томограми, задані на площинах $\Pi 1_i$, $i=\overline{1,n}$, B_k - томограми, задані на площинах $\Pi 2_k$, $k=\overline{1,m}$, C_l - на площинах $\Pi 3_l$, $l=\overline{1,s}$;

$$\Delta_{ikl}=\begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} \\ b_{k1} & b_{k2} & b_{k3} \\ c_{l1} & c_{l2} & c_{l3} \end{vmatrix}, \qquad \bar{x}=\begin{cases}(x_1,x_2),x_3=0\\(x_1,x_3),x_2=0\\(x_2,x_3),x_1=0\end{cases}.$$

Означення. Томограмою (слідом функції $f(x)$) $\mathrm{T}_k(\bar{x})$ на площині $\omega_k(x)=0$ за умови, що всі три коефіцієнти, тобто $a_{i,j}, i=\overline{1,m}$ або $b_{k,j}, k=\overline{1,n}$ або $c_{l,j}, l=\overline{1,s},\; j=1,2,3$, не дорівнюють нулю, будемо називати одну з трьох функцій

$$\mathrm{T}_k(\bar{x})=\begin{cases} f(x_{1k}(x_2,x_3),x_2,x_3)\\ f(x_1,x_{2k}(x_1,x_3),x_3)\\ f(x_1,x_2,x_{3k}(x_1,x_2))\end{cases}=\begin{cases} f((\gamma_k-a_{k2}x_2-a_{k3}x_3)/a_{k1},x_2,x_3),\; a_{k1}\neq 0\\ f(x_{1,}(\gamma_k-a_{k1}x_1-a_{k3}x_3)/a_{k2},x_3),\; a_{k2}\neq 0\\ f(x_1,x_1,(\gamma_k-a_{k1}x_1-a_{k2}x_2)/a_{k3}),\; a_{k3}\neq 0\end{cases}.$$

Нехай томограми A_i, B_k, C_l перетинаються в точці V_{ikl}. Позначимо

$$u_{li}^k = V_{ikl} + \frac{\tau_{ik}^{\omega 1,\omega 2}}{\Delta_{ikl}}\omega 3_l(x) + \frac{\tau_{kl}^{\omega 2,\omega 3}}{\Delta_{kli}}\omega 1_i(x), \qquad w_i(x) = V_{ikl} + \frac{\tau_{kl}^{\omega 2,\omega 3}}{\Delta_{kli}}\omega 1_i(x).$$

Теорема 1. Для існування функції $L_{ikl}(x) \in C^r(\Omega), \Omega \subset R^3$ із заданими томограмами $A_i, i = \overline{1,n},\ B_k,\ k = \overline{1,m},\ C_l,\ l = \overline{1,s}$, для якої виконуються умови

$$L_{ikl}(x)\big|_{\Pi 1_i} = \mathrm{T}_{1,i}(\bar{x})\big|_{\Pi 1_i},\ L_{ikl}(x)\big|_{\Pi 2_k} = \mathrm{T}_{2,k}(\bar{x})\big|_{\Pi 2_k},\quad L_{ikl}(x)\big|_{\Pi 3_l} = \mathrm{T}_{3,l}(\bar{x})\big|_{\Pi 3_l}\ ,$$

де $\mathrm{T}_{1,i}$ – i-та томограма, яка лежить на площині $\Pi 1_i$, $\mathrm{T}_{2,k}$ – k - та томограма, яка лежить на площині $\Pi 2_k$, $\mathrm{T}_{3,l}$ – l - та томограма, яка лежить на площині $\Pi 3_l$, необхідно та достатньо, щоб сліди $\mathrm{T}_{q,d}(\bar{x}),\ q = 1,2,3,\ d = i,k,l, i = \overline{1,n}, k = \overline{1,m},\ l = \overline{1,s}$ задовольняли умові $\mathrm{T}_{q,d}(\bar{x}) \in C^r(R^2),\ r \ge 0$ та умовам С.М. Нікольського, які на ребрі Γ_{kl} зводяться до перевірки рівностей

$$\mathrm{T}_{2,k}(u_{li}^k(x))\Big|_{\omega 3_l(x)=0} = \mathrm{T}_{3,l}(u_{il}^l(x))\Big|_{\omega 2_k(x)=0}.$$

Аналогічний вигляд мають ці умови на ребрах Γ_{ik}, Γ_{li}. В точці V_{ikl} умови Нікольського зводяться до перевірки рівностей

$$\mathrm{T}_{3,l}(u_{ik}^l(x))\Big|_{\omega 1_i(x)=0,\omega 2_k(x)=0} = \mathrm{T}_{2,k}(u_{li}^k(x))\Big|_{\omega 3_l(x)=0,\omega 1_i(x)=0} =$$
$$= \mathrm{T}_{1,i}(u_{kl}^i(x))\Big|_{\omega 2_k(x)=0,\omega 3_l(x)=0}.$$

Оператор $L_{ikl}(x)$ можна побудувати у вигляді

$$L_{ikl}(x) = L_{ikl}(\{T_{q,d}\}, x) = \big[L_{ik}^l + L_{kl}^i + L_{li}^k - L_{li}^k L_{kl}^i - L_{kl}^i L_{li}^l - L_{li}^k L_{ik}^l +$$
$$+ L_{ik}^l L_{kl}^i L_{li}^k\big](\{T_{q,d}\}, x),$$

де

$$L_{ik}^l(\{\mathrm{T}_{q,d}(x)\}, x) = \mathrm{T}_{3,l}(u_{ik}^l(x)) = f(u_{ik}^l(x)),$$
$$L_{ik}^l L_{kl}^i(\{\mathrm{T}_{q,d}\}, x) = f(w_k(x)).$$
$$L_{ik}^l L_{kl}^i L_{li}^k(\{\mathrm{T}_{q,d}\}, x) = f(V_{ikl}),\ q = 1,2,3,\ d = i,k,l.$$

Аналогічно визначаються оператори $L_{kl}^i, L_{li}^k, L_{kl}^i L_{li}^k,\ L_{li}^k L_{ik}^l$.

Теорема 2. Припустимо, що внутрішня структура тривимірного тіла описується функцією $f(x) \in C^r(\Omega)$ $(r \ge 3), \Omega \subset R^3$, яка має томограми $A_i, B_k, C_l, i = \overline{1,n}, \quad k = \overline{1,m}, l = \overline{1,s}$, задані на площинах $\Pi 1_i$, $\Pi 2_k$, $\Pi 3_l$, та задовольняє умови

$$f(x)\big|_{\Pi 1_i} = \mathrm{T}_{1,i}(\bar{x})\big|_{\Pi 1_i}, \; f(x)\big|_{\Pi 2_k} = \mathrm{T}_{2,k}(\bar{x})\big|_{\Pi 2_k}, \; f(x)\big|_{\Pi 3_l} = \mathrm{T}_{3,l}(\bar{x})\big|_{\Pi 3_l},$$
$$i = \overline{1,n}, \; k = \overline{1,m}, \; l = \overline{1,s} \qquad (1)$$

Тоді для похибки $R_{ikl} f(x) = (I - L_{ikl}) f(x)$ наближеного відновлення внутрішньої структури $f(x)$ оператором $L_{ikl} f(x)$, побудованим за допомогою даного набору площин та томограм, виконується рівність

$$R_{ikl} f(x) = \int\limits_0^{\omega 1_i} \int\limits_0^{\omega 2_k} \int\limits_0^{\omega 3_l} \frac{\partial^3}{\partial t_i \, \partial t_k \, \partial t_l} f\left(V_{ikl} + \frac{\tau_{kl}}{\Delta_{kli}} t_i + \frac{\tau_{li}}{\Delta_{lik}} t_k + \frac{\tau_{ik}}{\Delta_{ikl}} t_l \right) dt_i \, dt_k \, dt_l \qquad (2)$$

Теорема 3. Нехай множина трьох груп паралельних томограм, які розміщуються на площинах, що задаються рівняннями:

$$\Pi 1_i : \omega 1_i(x) = 0, \; i = \overline{1,n}, \qquad \Pi 2_k : \omega 2_k(x) = 0, \; k = \overline{1,m},`$$
$$\Pi 3_l : \omega 3_l(x) = 0, \; l = \overline{1,s},$$

задовольняє дві умови:

1) в одній точці $V_{ikl} = A_i \cap B_k \cap C_l$ перетинаються рівно три томограми;
2) кожна томограма однієї групи перетинається з кожною томограмою інших двох груп (а всередині групи томограми паралельні, тобто не перетинаються).

Тоді система функцій

$$h_{ikl}(x) = \frac{\prod\limits_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{m} \omega 1_j(x) \; \prod\limits_{\substack{j=1 \\ j \ne k}}^{n} \omega 2_k(x) \; \prod\limits_{\substack{j=1 \\ j \ne l}}^{s} \omega 3_j(x)}{\prod\limits_{\substack{j=1 \\ j \ne i}}^{m} \omega 1_j(V_{ikl}) \; \prod\limits_{\substack{j=1 \\ j \ne k}}^{n} \omega 2_k(V_{ikl}) \; \prod\limits_{\substack{j=1 \\ j \ne l}}^{s} \omega 3_j(V_{ikl})}, \quad i = \overline{1,n}, \; k = \overline{1,m}, \; l = \overline{1,s}$$

має властивості

$$h_{ikl}(V_{i'k'l'}) = \delta_{i,i'} \delta_{k,k'} \delta_{l,l'}, \; i, i' = \overline{1,n}, \; k, k' = \overline{1,m}, \; l, l' = \overline{1,s}.$$

Лема 1. Нехай томограми $\mathrm{T}_{1,i}$, $\mathrm{T}_{2,k}$, $\mathrm{T}_{3,l}$, $i=\overline{1,n},\ k=\overline{1,m},\ l=\overline{1,s}$ задовольняють умови теореми 3. Тоді система функції $h_{ikl}(x)$ є розкладом одиниці

$$\sum_{\substack{i=1\\ i\neq k,l}}^{n}\ \sum_{\substack{k=1\\ k\neq i,l}}^{m}\ \sum_{\substack{l=1\\ l\neq i,k}}^{s} h_{ikl}(x)=1$$

Теорема 4. Нехай томограми $T_{1,i}(\bar{x}),T_{2,k}(\bar{x}),T_{3,l}(\bar{x})\in C^r(R^2)$, $r\geq 3$ задовольняють умови Нікольського на ребрах і в точках перетину площин. Тоді функція

$$L(x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{s} h_{ikl}(x)L_{ikl}(x)$$

є поліноміальним інтерфлетантом з властивостями

$$L(x)\in C^r(\Omega),\ L(x)\big|_{\Pi 1_i}=T_{1,i}(\bar{x})\big|_{\Pi 1_i},L(x)\big|_{\Pi 2_k}=T_{2,k}(\bar{x})\big|_{\Pi 2_k}\ L(x)\big|_{\Pi 3_l}=T_{3,l}(\bar{x})\big|_{\Pi 3_l}$$
$$i=\overline{1,n},\ k=\overline{1,m},\ l=\overline{1,s}.$$

При цьому $\forall f(x)\in C^r(\Omega),\ r\geq 3$, що задовольняють умови (1), виконується рівність

$$L(x)=Lf(x):f(x)=Lf(x)+R\,f(x),\qquad R(x)f(x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{s} h_{ikl}(x)R_{ikl}f(x)$$

де $R_{ikl}f(x)$ визначається формулою (2).

Отже, за допомогою оператора поліноміальної інтерфлетації, який визначається в теоремі 4, можна відновити внутрішню структуру тривимірного тіла за відомими томограмами, що лежать на системі трьох груп перерізаних площин, з більш високою точністю (ε^3), ніж це можна зробити за відомими томограмами, які лежать на одній групі паралельних площин (ε) (як це робиться в класичній томографії).

В третьому розділі проведені дослідження методів відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла на системі томограм, які лежать на системі взаємно перпендикулярних площин. Також представлені результати обробки експериментальних досліджень та розробка програмного забезпечення відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла за результатами математичного експерименту, за допомогою інтерфлетації функції.

Інформацією про функцію $f(x,y,z)$, тобто про внутрішню структуру тіла, є набір томограм $X_k.bmp, k=\overline{1,M_1}$, $Y_l.bmp, l=\overline{1,M_2}$,

$Z_p.bmp, p=\overline{1,M_3}$, які лежать на площинах, перпендикулярних координатним вісям OX, OY, OZ. відповідно. Кожній томограмі ставимо у відповідність функцію:

$$X_k.bmp \mapsto A(k,y,z),\ k=\overline{1,M_1},\ 0\le y\le b,\ 0\le z\le c;$$
$$Y_l.bmp \mapsto B(x,l,z),\ l=\overline{1,M_1},\ 0\le x\le a,\ 0\le z\le c;$$
$$Z_p.bmp \mapsto S(x,y,p),\ p=\overline{1,M_1},\ 0\le x\le a,\ 0\le y\le b,$$

Теорема 5. Нехай оператори $In1f$, $In2f$, $In3f$ являються операторами сплайн-интерполяції функції $f(x,y,z)$ за змінними x,y,z відповідно:

$$In1f(x,y,z)=\sum_{k=1}^{M_1} Sp_{M_1,k}(x)A(k,y,z), \qquad In2f(x,y,z)=\sum_{l=1}^{M_2} Sp_{M_2,l}(y)B(x,l,z),$$
$$In3f(x,y,z)=\sum_{p=1}^{M_3} Sp_{M_3,p}(x)C(x,y,p),$$

де $Sp_{M_1,k}(x)$ – базисні сплайни ступеня $m\ (m=1,2,3)$ з такими властивостями:

$$Sp_{M_1,k}(p/M_1)=\delta_{k,p},\ i,p=\overline{0,M_1}\,.$$

Аналогічно визначаються сплайни $Sp_{M_2,l}$, $Sp_{M_3,p}$.

Якщо функції $A(k,y,z), k=\overline{1,M_1}$, $B(x,l,z), l=\overline{1,M_2}$, $C(x,y,p), p=\overline{1,M_3}$ задовольняють такі умови:

$$A(k,y_l,z)=B(x_k,l,z);\ B(x,l,z_p)=C(x,y_l,p);\ A(k,y,z_p)=C(x_k,y,p),$$

то оператор сплайн – интерфлетації

$$Lf(x,y,z)=\left(In1+In2+In3-In1In2-In1In3-In2In3+In1In2In3\right)f(x,y,z)$$

має наступні властивості:

$$Lf(k,y,z)=A(k,y,z), k=\overline{1,M_1}; \qquad Lf(x,l,z)=B(x,l,z), l=\overline{1,M_2};$$
$$Lf(x,y,p)=C(x,y,p), p=\overline{1,M_3}.$$

При описі внутрішньої структури тривимірного тіла істотно використовуються експериментальні дані – томограми ($T_q, q=\overline{1,M}$) та площини ($\Pi_k, k=\overline{1,M}$), на яких лежать ці томограми. В розділі проаналізовано вплив похибок задання експериментальних даних на похибку відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла. Визначена похибка заокруглення для методу відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла за відомими томограмами, що лежать в системі взаємно перпендикулярних площин.

Твердження 1. Якщо є похибка вхідних даних (томограм), тобто томограма не лежить на заданій площині: $A(k,y,z)+\varepsilon 1_k$, $A(k,y,z)+\varepsilon 2_l$, $S(x,y,p)+\varepsilon 3_k$, то $Lu(x,y,z)=u(x,y,z)+r_1+r_2$, де r_1 – похибка методу, r_2 - похибка вихідних даних. Тоді похибку вихідних даних можна оцінити так:

$$|r_2| \le \max_{\substack{k=\overline{1,n}\\ l=\overline{1,m}\\ p=\overline{1,s}}} \{\varepsilon 1_k, \varepsilon 2_l, \varepsilon 3_p\}$$

В наступних теоремах визначено загальний вигляд похибки та оцінка методу відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла за відомими томограмами, що лежать на системі взаємно перпендикулярних площин, за допомогою оператора поліноміальної інтерфлетації.

Теорема 6. Нехай $f(x,y,z)\in C^{r1,r2,r3}(\Omega)$, $r1,r2,r3=\overline{1,2}$. Тоді для залишку $R\,Lf(x,y,z)=(I-L)f(x,y,z)$ виконується рівність

$$R\,Lf(x,y,z)=(I-In1)(I-In2)(I-In3)f(x,y,z),$$

де $In1, In2, In3$ - оператори, що визначені в теоремі 5.

$$RLf(x,y,z)=\sum_{k=1}^{M_1}\sum_{l=1}^{M_2}\sum_{p=1}^{M_3}\Big[Sp_{M_1,k}(x)Sp_{M_2,l}(y)Sp_{M_3,p}(z)\times$$

$$\times\int_{x_k}^{x}\int_{y_l}^{y}\int_{z_p}^{z}\frac{\partial^{r1+r2+r3}f(x,y,z)}{\partial t1^{r1}\partial t2^{r2}\partial t3^{r3}}\frac{(x_k-t1)^{r1-1}}{(r1-1)!}\frac{(y_l-t2)^{r2-1}}{(r2-1)!}\frac{(z_p-t3)^{r3-1}}{(r3-1)!}dt1\,dt2\,dt3$$

Теорема 7. Нехай $f(x,y,z)\in C^{r1,r2,r3}(\Omega)$, $r1,r2,r3=\overline{0,1}$. Тоді для залишку $RLf(x,y,z)=(I-L)f(x,y,z)$ виконується нерівність

$$\|RLf(x,y,z)\|_{C[0,1]^3}\le CM\,\Delta 1^{r1}\Delta 2^{r2}\Delta 3^{r3},\ M=\max_{x,y,z\in[0,1]}\frac{\partial^{r1+r2+r3}}{\partial x^{r1}\partial y^{r2}\partial z^{r3}}f(x,y,z).$$

$$\Delta 1=\max_{1\le k\le M_1}(x_{k+1}-x_k),\Delta 2=\max_{1\le l\le M_2}(y_{l+1}-y_l),\ \Delta 3=\max_{1\le p\le M_3}(z_{p+1}-z_p)$$

Зауваження. Якщо $r1=r2=r3=1$ (тобто відома перша похідна), тоді $C=1/8$, а якщо відомі ще й другі похідні, то можна встановити, що $C=(1/8)^3$.

За викладеною методикою був розроблений комплекс програм в системі комп'ютерної математики *Matlab*. Результати її тестування демонструють високу точність. Пропонуються результати візуалізації точного розв'язку та отриманого експериментально для випадку, коли відома точна функція.

Нехай є функція, наприклад, такого вигляду:

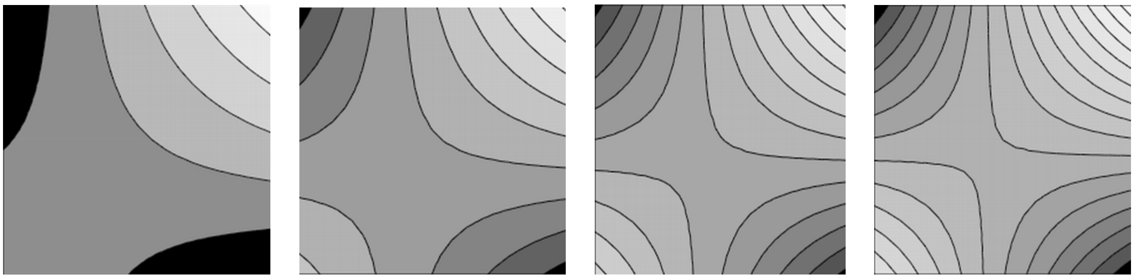
$$f(x,y,z) = A\cdot x\cdot y\cdot z + x\cdot y\cdot g3(z) + x\cdot z\cdot g2(y) + z\cdot y\cdot g1(x) + x\cdot h1(y,z) + \\ + y\cdot h2(x,z) + z\cdot h3(x,y),$$

де

$$g1(x) = x - a, \qquad h1(y,z) = (y-a)+(z-a), \qquad \mathrm{A} = 2$$
$$g2(y) = y - a, \qquad h2(x,z) = (x-a)+(z-a), \qquad \mathrm{a} = 0.25$$
$$g3(z) = z - a, \qquad h3(x,y) = (x-a)+(y-a),$$

Згідно з теоретичними твердженнями на функціях такого вигляду похибка наближення дорівнює нулю або постійній, тобто точні та есперіментально отримані розв'язки повинні практично співпадати.

З цієї функції були отримані вихідні дані – перерізи функції площинами $x = 0.2$, $x = 0.4$, $x = 0.6$, $x = 0.8$, які представлені на рис. 1.

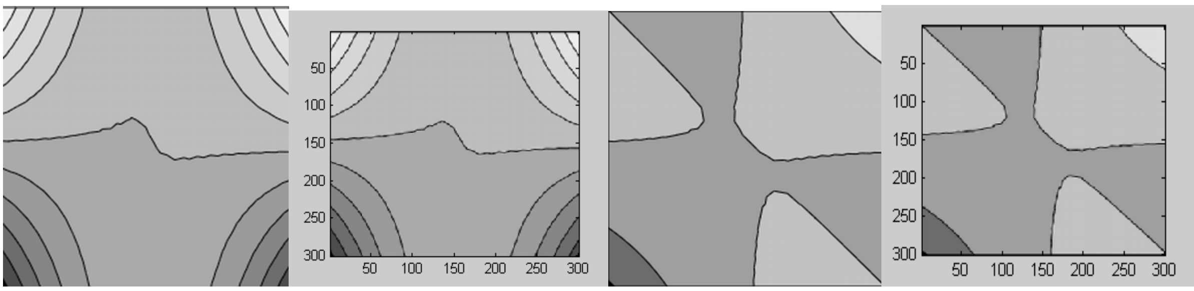


x = 0.2 x = 0.4 x = 0.6 x = 0.8

Рис. 1. Зображення перерізів функції $f(x,y,z)$ вказаними площинами.

Оскільки отримане тіло буде симетричне, то зображення перерізів площинами, перпендикулярними осям y та z будуть аналогічними.

Практична реалізація була здійснена в системі комп'ютерної математики Mathcad. Була складена програма *brain(a,b,c,d)*, за допомогою якої можна знайти зображення перерізу тривимірного тіла площиною, що має рівняння: $ax+by+cz+d=0$. Результати роботи програми представлені на рис.2



а) x + y=0 *б) brain(1,1,0,0)* в) x + y + z=0 *г) brain(1,1,1,0)*

Рис. 2. а) переріз тривимірного тіла площиною x+y = 0 (точний розв'язок); б) переріз площиною x+y = 0, отриманий наближено; в) переріз тривимірного тіла $f(x, y, z)$ площиною x+y+z = 0 (точний розв'язок); г) переріз площиною x+y+z = 0, отриманий наближено.

З рис. 2 видно, що точні розв'язки співпадають з експериментально отриманими, тобто підтверджується викладена теорія.

Продемонструємо обчислювальний експеримент для невідомого тривимірного тіла (головний мозок людини). Для прикладу в якості даних Радона були взяті малюнки, отримані з пакета програм "Digital Anatomist" (100 малюнків, перпендикулярних вісі *x*, 110 малюнків, перпендикулярних вісі *y*, 35 малюнків, перпендикулярних вісі *z*). Усі знімки взяті з постійним кроком 1,3 мм (рис. 3 – 5.).

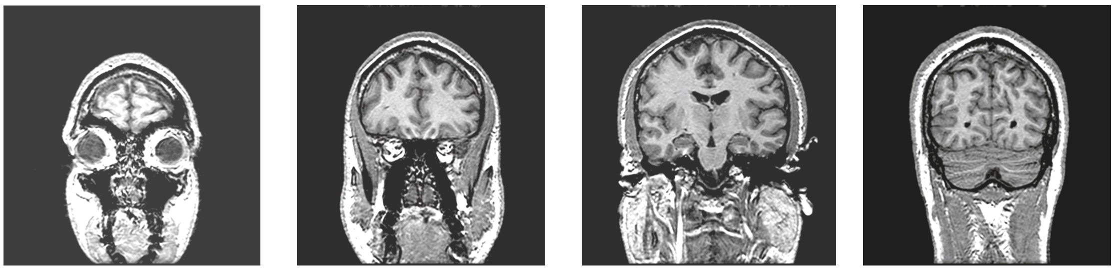


Рис. 3. Приклади перетинів головного мозку площинами, перпендикулярними вісі OX.

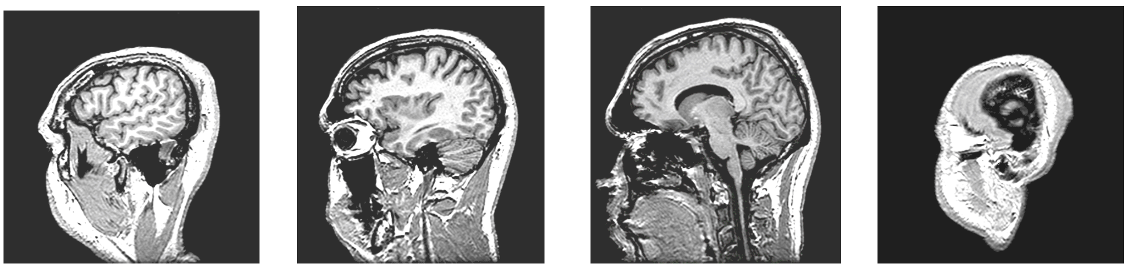


Рис. 4. Приклади перетинів головного мозку площинами, перпендикулярними вісі OY.

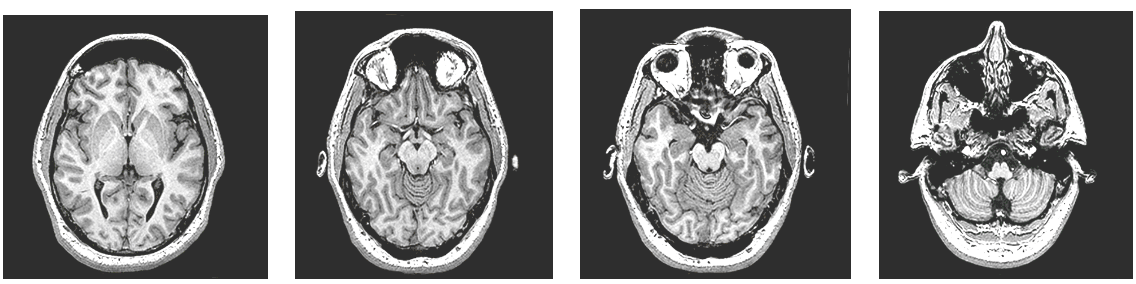


Рис. 5. Приклади перетинів головного мозку площинами, перпендикулярними вісі OZ.

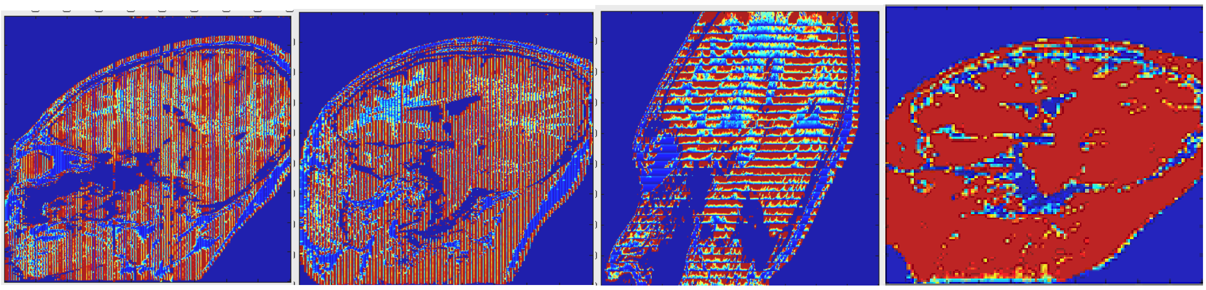
Практична реалізація була здійснена в системі комп'ютерної математики Matlab. Було складено програми:

Brain.m - дозволяє знайти перетини тривимірного тіла у будь-якій площині за малюнками у трьох взаємно перпендикулярних площинах ,

Brainox.m - знаходить перетини тривимірного тіла за малюнками, перпендикулярними тільки вісі *OX,* *Brainoy.m* – знаходить перетини тривимірного тіла за малюнками, перпендикулярними тільки вісі OY,

Brainoz.m – знаходить перетини тривимірного тіла за малюнками, перпендикулярними тільки вісі OZ .

В усіх чотирьох програмах шукався переріз головного мозку площиною, заданою рівнянням: $x+y+10z+1=0$. Були отримані результати, представлені на рис. 6.



а) б) в) г)

Рис. 6. а) результат програми Brainox;
б) результат програми Brainoy;
в) результат програми Brainoz;
г) результат програми Brain.

З рис. 6 видно, що малюнок г) дає більш точний результат, ніж інші, тобто, якщо класичні методи дають похибку ε, то запропонований метод дає похибку ε^3. Також в цьому розділі наведений тест результатів цих програм в залежності від кроку вхідних даних та зроблено висновок, що чим менше крок, з яким беруться вхідні дані, тим точніше результат відновлення ($O(h^6)$ для *brain* та $O(h^2)$ для *brainx*).

ВИСНОВКИ

В дисертаційній роботі одержано результати, які в сукупності є подальшим узагальненням і розвитком теорії наближення функції операторами інтерфлетації та фундаментальною основою загального підходу до математичного моделювання й розв'язання задач тривимірної комп'ютерної томографії. Результати роботи є теоретичною основою розв'язання важливої наукової проблеми розв'язання тривимірних задач комп'ютерної томографії.

1. У роботі проведено системний аналіз сучасного стану існуючих засобів математичного моделювання та розв'язання тривимірних задач комп'ютерної томографії.
2. Побудовано загальний вигляд оператора поліноміальної інтерфлетації на системі трьох груп перерізаних площин (в кожній групі площини паралельні).

3. Визначено загальний вигляд оператора сплайн – інтерфлетації на системі томограм, які лежать на взаємно перпендикулярних площинах.
4. Розроблено математичну модель та метод відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла за його томограмами (проекціями), що лежать в системі взаємно перпендикулярних площин з використанням побудованого оператора сплайн – інтерфлетації функцій трьох змінних.
5. Отримано та досліджено метод відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла за його томограмами, що лежать в системі трьох будь-яких перерізаних площин з використанням побудованого оператора поліноміальної інтерфлетації функцій трьох змінних.
6. Проаналізовано вплив похибок задання експериментальних даних на похибку відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла. Визначена похибка заокруглення для методу відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла за відомими томограмами, що лежать в системі взаємно перпендикулярних площин. Отримана оцінка похибки цього методу, виходячи з якої можна встановити, що оператор інтерфлетації функцій трьох змінних на системі взаємно перепндикулярних площин має похибку $O(\varepsilon^3)$, якщо вони використовують опрератори класичних методів (інтерполяції) по кожній із змінних, що мають похибку $O(\varepsilon)$.
7. В даній роботі вперше дається поняття томограми в математичному сенсі як сліду функції трьох змінних на заданій площині та досліджено алгоритм переведення зображення томограми у функціональну залежність, аргументами якої є номер малюнка та координати пікселей. Це дає можливість працювати з томограмами, як з функціями, тобто дозволяє отримувати за номером малюнка його зображення та виділяти компонент кольору у вказаній точці малюнку.
8. Створено пакет програм для реалізації і тестування запропонованих алгоритмів.
9. Практичне значення результатів підтверджується їх впровадженням. Результати дисертаційної роботи впроваджено в держбюджетну науково-дослідну роботу та в навчальний процес Української інженерно – педагогічної академії.
10. Побудовані в роботі математичні моделі, методи та алгоритми можуть бути використані для комп'ютерних томографів з класичною схемою збору даних (віяльна). Практичне використання результатів роботи дозволяє значно підвищити точність отриманих розв'язків.

Всі теоретичні твердження дисертаційної роботи доведені у відповідних лемах та теоремах і підтверджені на тестових прикладах за допомогою створених дисертантом програм у системах комп'ютерної математики MATLAB. Вказані програми наведені з детальним описом в Додатках до дисертації.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. *Литвин О.М., Першина Ю.І.* Математична модель відновлення внутрішньої структури тривимірного об'єкта за відомими його томограмами з використанням інтерфлетації функцій. // Доповіді НАНУ. – 2005. – №1. - С. 20-24.
2. *Литвин О.М., Першина Ю.І.* Математична модель відновлення тривимірних об'єктів за їх томограмами на системі трьох груп перерізаних площин з використанням інтерфлетації функції. // Доповіді НАНУ. – 2005. – №8. - С. 67-71.
3. *Литвин О.Н., Першина Ю.И.* Восстановление внутренней структуры трехмерных объектов по их следам на системе трех групп пересекающихся плоскостей с использованием интерфлетации функции. // Компьютерная математика. – Киев, 2006. – №1. –С.70 – 79.
4. *Литвин О.Н., Першина Ю.И.* Восстановление внутренней структуры трехмерного объекта по его томограммам, лежащим в системе трех групп пересекающихся плоскостей // Автометрия. – 2006. –Т.42, №2. – С.107 – 118.
5. *Литвин О.М., Першина Ю.І.* Відновлення тривимірних об'єктів за їх слідами на системі перерізаних площин з використанням інтерфлетації функцій.// Оброблення сигналів і зображень та розпізнавання образів: Праці сьомої міжнародної всеукраїнської конференції (11-15 жовтня 2004 р.). – Київ. - 2004р. –С.221-224
6. *Oleg N. Lytvyn, Yulia I. Pershina* Reconstruction of 3 – D objects with use interflation of functions. // Signal and image processing: Proceeding of the Second IASTED International Multi – Conference on Automation, Control, and Information Technology (June 20 – 24 2005). – Novosibirsk. – 2005. – P.274 – 279.
7. *Литвин О.М., Першина Ю.І.* Про метод відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла за допомогою інтерфлетації. // Питання оптимізації обчислень (ПОО - XXXII): Праці міжнародної конференції (19-23 вересня 2005р.). – Київ. – 2005. – С.128 – 129.
8. *Першина* Ю.І. Деякі аспекти обробки томограм в методі відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла. // Конференція молодих вчених та спеціалістів. – Харків: ІПМАШ ім. А.М. Підгорного. – 2005. – С.29.
9. *Першина Ю.І.* Математична модель відновлення внутрішньої структури тривимірного об'єкта за відомими його томограмами з використанням інтерфлетації функцій // Десята міжнародна наукова конференція ім. академіка М. Кравчука, 13-15 травня, Київ 2004 р.- С.437.
10. *Першина* Ю.І. Деякі аспекти збереження та обробки томограм в методі відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла за допомогою інтерфлетації функції. // XXXVIII науково-практичної конференції науково - педагогічних працівників, науковців, аспірантів та співробітників УІПА. – Харків. - 2005, 2 частина. - С.92-93

АНОТАЦІЯ

Першина Ю.І. Математичне моделювання в комп’ютерній томографії з використанням інтерфлетації функції – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.05.02 - математичне моделювання та обчислювальні методи. – Харківський національний університет радіоелектроніки, Харків, 2006.

Дисертація присвячена математичному моделюванню в комп’ютерній томографії з використанням інтерфлетації функції.

Досліджено метод відновлення просторово змінного коефіцієнта поглинання всередині тривимірного об’єкта за відомими його томограмами, що лежать в системі трьох групп перерізаних площин. Метод використовує оператор поліноміальної інтерфлетації функції трьох змінних. Також досліджено метод відновлення коефіцієнта поглинання всередині тривимірного тіла за його томограмами в системі взаємно перпендикулярних площин з використанням оператора сплайн - інтерфлетації. Цей метод дає більш високу точність ніж класичні методи відновлення. Вперше дається поняття томограми в математичному сенсі як сліду функції трьох змінних на заданій площині та досліджено алгоритм переведення зображення томограми у функціональну залежність, аргументами якої є номер малюнка та координати пікселей. Це дає можливість працювати з томограмами, як з функціями. Запропоновано алгоритмічні та програмні реалізації цих методів.

Ключові слова: математичне моделювання, комп’ютерна томографія, інтерфлетація функцій, томограма, Matlab.

АННОТАЦИЯ

Першина Ю.И. Математическое моделирование в компьютерной томографии с использованием интерфлетации функции. – Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.05.02 – математическое моделирование и вычислительные методы. – Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков, 2006.

Диссертация посвящена математическому моделированию в компьютерной томографии с использованием интерфлетации функции.

Построен общий вид оператора полиномиальной интерфлетации на системе трех групп пересеченных плоскостей (в каждой группе плоскости параллельны). Исследован метод восстановления пространственно переменного коэффициента поглощения внутри трехмерного объекта по известным его томограммам, которые лежат в системе трех групп пересеченных плоскостей с помощью построенного оператора полиномиальной интерфлетации функции трех переменных.

Также определен общий вид оператора сплайн – интерфлетации на системе томограмм, которые лежат на взаимно перпендикулярных плоскостях. Исследован метод восстановления коэффициента поглощения внутри трехмерного тела по его томограммам в системе взаимно перпендикулярных плоскостей с использованием определенного оператора сплайн - интерфлетации. Этот метод дает более высокую точность, чем методы восстановления коэффициента поглощения внутри трехмерного тела по известным томограммам, которые лежат на плоскостях, параллельных только одной координатной плоскости.

Проведен анализ влияния погрешностей задания экспериментальных данных на погрешность восстановления коэффициента поглощения внутри трехмерного тела. Определена погрешность округления для метода восстановления коэффициента поглощения внутри трехмерного тела по известным томограммам, которые лежат на системе взаимно перпендикулярных плоскостей. Получена оценка погрешности этого метода.

Впервые дается понятие томограммы в математическом смысле как след от функции трех переменных на заданной плоскости и построен алгоритм перевода изображения томограммы в функциональную зависимость, аргументами которой является номер рисунка и координаты пикселей. Это дает возможность работать с томограммами, как с функциями, то есть позволяет по номеру рисунка получать его изображение и выделять компоненту цвета в указанной точке рисунка.

Предложенный метод решения трехмерной задачи компьютерной томографии основан на использовании набора томограмм, расположенных на трех группах пересеченных плоскостях. Этот метод существенно отличается от существующих тем, что в нем может проводиться обработка томограмм, которые не лежат в параллельных плоскостях (например, в простейшем случае томограммы могут располагаться системе трех групп плоскостей, параллельных координатным плоскостям). Эта метод дает возможность решать трехмерную задачу компьютерной томографии для принципиально новой схемы сбора данных. Например, он допускает использование веерной схемы сбора информации в каждой из плоскостей, в которых лежат томограммы.

Предложены алгоритмические и программные реализации методов.

Полученные результаты использованы при решении задач восстановления пространственно переменного коэффициента поглощения внутри трехмерного тела при математическом моделировании в компьютерной томографии, а также используются в учебном процессе, что подтверждено актами внедрения.

Ключевые слова: математическое моделирование, компьютерная томография, интерфлетация функций, томограмма, Matlab.

ABSTRACT

Pershina Y.I. **Mathematical modelling in a computer tomography with use interflatation functions**. – Manuscript.

The thesis is presented for the Candidate of Physical and Mathematical degree in speciality 01.05.02 - mathematical modelling and numerical methods. – Kharkov National University of Radioelectronics, Kharkov, 2006.

The dissertation is devoted to mathematical modelling in a computer tomography with use interflatation functionis.

The method of restoration of spatially variable koefficient of absorption inside three-dimensional object under its known tomograms which lay in system of three groups of the crossed planes with the help of the operator polinomial interflatation functions of three variables is investigated. Also the method of restoration of koefficient of absorption inside a three-dimensional body under its tomograms in system of mutually perpendicular planes with use of the operator a spline - interflatation is investigated. This method gives higher accuracy, than classical restoration methods. For the first time the concept of the tomogram of mathematical sense as the trace from function of three variables on the set plane and is constructed algorithm of translation of the image of the tomogram in functional dependence which arguments is number of figure and coordinates of pixels is given. It enables to work with tomograms as with functions.

Algorithmic and program realizations of methods are offered.

Key words: mathematical modelling, computer tomography, interflation of function, tomogram, Matlab.