УДК 621.01

©Малініна Ю.В.

СИНТЕЗ ШАРНІРНОГО ЧОТИРИЛАНКОВИКА ЗА КРАЙНІМИ ПОЛОЖЕННЯМИ ШАТУНА

1. Постановка проблеми

Під час створення нового агрегату або машини найбільшу складність для конструктора представляє задача синтезу механізмів. Під синтезом розуміється проектування механізму. Синтез представляє задачу зворотну аналізові і, як усі зворотні задачі, складний. У синтезі немає таких простих загальних методів, які були вивчені в аналізі. Багато задач синтезу ще вимагають рішення. Під час створення механізму конструктор має пройти три стадії синтезу. Перша стадія – синтез структурної схеми. Він відносно простий і зводиться до вибору механізму, що задовольняє загальним вимогам до нього. На цій стадії вивчаються аналоги даного механізму, використовується довідкова література

Друга стадія – метричний синтез. Тут визначаються розміри ланок механізму, при яких задовольняються поставлені вимоги. Метричний синтез спирається на засоби кінематичного аналізу, так що найчастіше синтез зводиться до багаторазового повторення аналізу.

Третя стадія – динамічний синтез. Це найбільш загальна задача синтезу, у якій враховуються не тільки кінематичні, але і динамічні вимоги до механізму.

Треба відзначити що найпростіший кінематичний синтез кулачкових механізмів, для яких можна задати майже любий закон руху вихідної ланки та шляхом не складних побудов і розрахунків знайти профіль кулачка, що забезпечує заданий закон руху. Набагато складніший синтез важільних механізмів, який може бути виконаний лише приблизно. Загальним недоліком більшості методів синтезу є те, що вони не дають можливості обирати схему механізму, а розміри ланок часто виходять конструктивно непридатними. Однак ці недоліки в значній мірі усувають застосуванням ЕОМ, які дозволяють оптимізувати різні критерії і враховувати більшу кількість кінематичних, динамічних та конструктивних обмежень.

Під час виконання конструкторських розробок часто виникає необхідність створити чотири ланковий важільний механізм, що є найбільш поширеним серед важільних механізмів в техніці. При курсовому проектуванні в курсі теорії механізмів та машин студенти вирішують цю задачу за крайніми положеннями механізму графічним методом, який дає лише тільки приблизні значення довжин ланок та їх положень відносно одне одного. Виникає необхідність запропонувати більш точний та дієвий метод синтезу.

2. Аналіз досліджень

Перші методи синтезу важільних механізмів були запропоновані П.Л. Чебишевим ще у 1853 році, вони були засновані на використанні теорії наближення функцій. В сучасній літературі з теорії механізмів та машин найбільш повно розроблені методи синтезу механізмів за заданими кінематичними властивостями – кінематичний синтез механізмів. Основні задачі синтезу, вирішується в роботах І.І. Артоболевського, М.І. Левитського, С.Н. Кожевникова та ін. [1–3], які пропонують вирішувати основні задачі синтезу трьома основними методами: графічним, аналітичним або графоаналітичним. Вибір того чи іншого методу значною мірою залежить від умов, поставлених при проектуванні.

3. Ціль дослідження

На відміну від відомої методики метричного синтезу шарнірного чотириланковика за коефіцієнтом продуктивності (зміни середньої швидкості коромисла) існують механізми, у яких вихідною ланкою є шатун (ножиці, притиски і т.д.). Для таких механізмів у даній роботі пропонується методика синтезу шарнірного чотириланковика за крайніми положеннями шатуна, яка вирішується аналітично.

4. Виклад основного матеріалу

Вивчаючи модель шарнирного чотириланковика можна побачити, що в залежності від того яка ланка прийнята за нерухому, а яка за вхідну, змінюються основні властивості механізму: механізм може бути кривошипно-коромисловим, двокривошипним, двокоромисловим. В техніці найбільше використовується кривошипно-коромисловий механізм.

Розглянемо шарнірний чотириланковик (рис. 1), тут прийняті наступні позначення: 1 – кривошип, 2 – шатун, 3 – коромисло; a - довжина кривошипа, b – довжина шатуна, c – довжина коромисла (довжина стійкі d – яка дорівнює 1); α – кутова координата ланки 1, δ – кутова координата ланки 2, β – кутова координата ланки 3, μ – кут передачі.

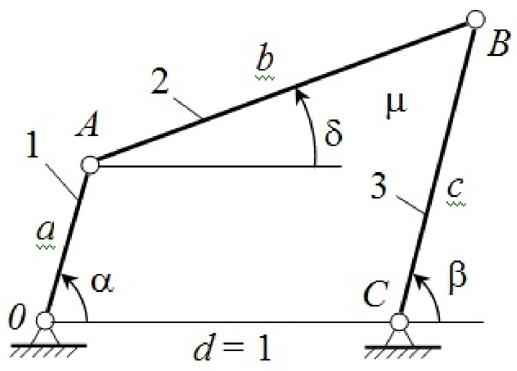

Рис. 1 – Шарнірний чотириланковик

Будемо вирішувати задачу синтезу шарнірного чотириланковика за крайніми положеннями шатуна. Заданими величинами є: γ_m – кут розмаху шатуна (кутове переміщення шатуна 2 між двома його крайніми положеннями); φ_m – кут повороту кривошипа 1, що відповідає поворотові шатуна 2 на кут γ_m між двома його крайніми положеннями. Синтезований шарнірний чотириланковика має три взаємно незалежних параметри: a , b і c . Як буде показано нижче, два з трьох зазначених параметрів є такими, що обчислюються, а один – вільним параметром.

Приймемо параметр c механізму як вільний параметр, тоді параметри a і b будуть такими, що обчислюються. Складемо рівняння геометричного аналізу шарнірного чотириланковика, зображеного на рисунку 1:

$$\begin{cases} a\,cos\alpha + b\cos\delta = 1 + \cos\beta \\ a\sin\alpha + b\sin\delta = c\sin\beta \end{cases} \tag{1}$$

Диференціюючи рівняння (1) по вхідній координаті, отримаємо

$$\begin{cases} -a\sin\alpha - b\sin\delta \cdot \delta' = -c\sin\beta \cdot \beta' \\ a\cos\alpha + b\cos\delta \cdot \delta' = c\cos\beta \cdot \beta' \end{cases}, \tag{2}$$

де $\delta' = \dfrac{d\delta}{d\alpha}$, $\beta' = \dfrac{d\beta}{d\alpha}$ – аналоги кутових швидкостей

З рівняння (2) знайдемо

$$\begin{aligned} \frac{d\delta}{d\alpha} &= \frac{-ac\sin(\alpha-\beta)}{bc\sin\left(\delta-\beta)\right)} = 0 \\ \frac{d\beta}{d\alpha} &= \frac{ab\sin(\delta-\alpha)}{bc\sin(\delta-\beta)} = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

В крайніх положеннях шатуна $\delta`` = 0$. Тоді з першого рівняння формули (3) отримуємо

$$\sin(\alpha_i - \beta_i) = 0,\ де\ i = 1,2,.... \tag{4}$$

де α_i, β_i – значення кутів α та β у тих двох положеннях механізму, коли шатун 2 займає крайні положення. Звідси слідує, що в крайніх положеннях ланки 1 і 3 взаємно паралельні, таким чином

$$\begin{cases} \alpha_1 = \beta_1 \\ \alpha_2 = \beta_2 + \pi \end{cases} \tag{5}$$

На рис.2 зображений чотириланковик в двох крайніх положеннях шатуну.

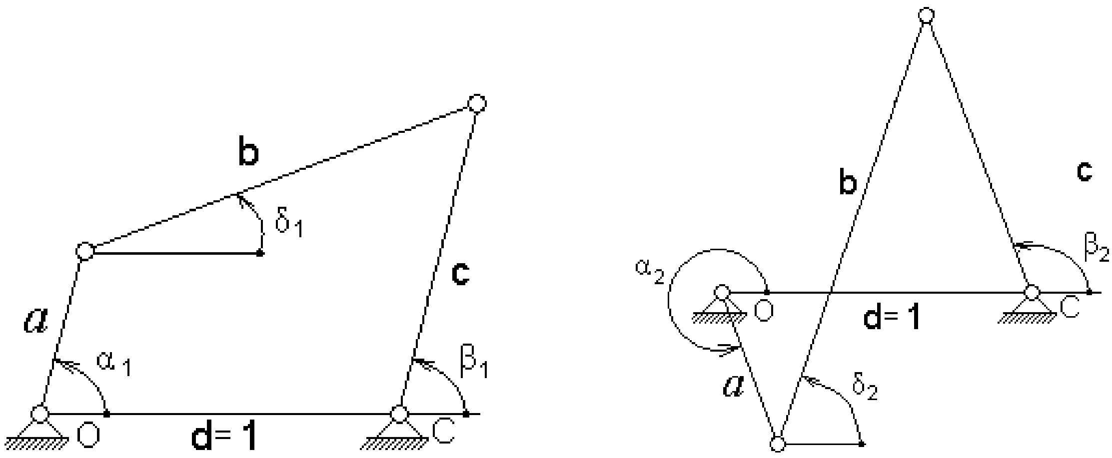

Рис. 2 – Шарнірний чотириланковик в крайніх положеннях

В крайніх положеннях шатуна рівняння (1) набудуть наступного вигляду

$$\begin{cases} a\cos\alpha_1 + b\cos\delta_1 = 1 + c\cos\beta_1 \\ a\sin\alpha_1 + b\sin\delta_1 = c\sin\beta_1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} a\cos\alpha_2 + b\cos\delta_2 = 1 + c\cos(\alpha_2 - \pi) \\ a\sin\alpha_2 + b\sin\delta_2 = c\sin(\alpha_2 - \pi) \end{cases} \qquad (6)$$

Рівняння (6) мають чотири невідомих величини: α_1, α_2, δ_1, δ_2

Перетворимо обидві системи

$$[1 + (c - a)\cos\alpha_1]^2 + [(c - a)\sin\alpha_1]^2 = b^2$$
$$[1 - (c + a)\cos\alpha_1]^2 + [(c + a)\sin\alpha_1]^2 = b^2 \qquad (7)$$

З рівнянь (7) знайдемо

$$\cos\alpha_1 = \frac{(a - c)^2 + 1 - b^2}{2(a - c)} \qquad \cos\alpha_2 = \frac{(a + c)^2 + 1 - b^2}{2(a + c)}$$
$$\sin\alpha_1 = \sqrt{1 - (\cos\alpha_1)^2} \qquad \sin\alpha_2 = -\sqrt{1 - (\cos\alpha_2)^2} \qquad (8)$$

Оскільки кут α_1 належить 1-ій або 2-ій чвертям, а кут α_2 – 3-ій та 4-ій, обираємо відповідні знаки перед радикалами.

З рівнянь (6) знаходимо кути δ_1 та δ_2

EMBED Equation.3 $$\cos\delta_1 = \frac{1+(c-a)\cos\alpha_1}{b}$$ $$\sin\delta_1 = \frac{(c-a)\sin\alpha_1}{b}$$ EMBED Equation.3

$$\cos\delta_2 = \frac{1-(c+a)\cos\alpha_2}{b}$$
$$\sin\delta_2 = \frac{-(c+a)\sin\alpha_2}{b} \qquad (9)$$

Спробуємо вирішити задачу синтезу чотириланковика аналітичним методом, для цього складемо рівняння синтезу. З рис. 2 можна визначити величини, які були задані при постановці задачі. Кут γ_m можна виразити через кутові координати шатуна 2. Максимальний розмах кривошипу 1 між крайніми положеннями шатуна φ_m, що відповідає робочому ходу, можна виразити через кутові координати кривошипу в крайніх положеннях шатуна.

$$\begin{cases} \alpha_2 - \alpha_1 = \varphi_m \\ \delta_2 - \delta_1 = \gamma_m \end{cases} \qquad (10)$$

або

$$\begin{cases} \cos(\alpha_2 - \alpha_1) = \cos\varphi_m \\ \cos(\delta_2 - \delta_1) = \cos\gamma_m \end{cases} \qquad (11)$$

$$\begin{cases} \cos\alpha_2 \cos\alpha_1 + \sin\alpha_2 \sin\alpha_1 = \cos\varphi_m \\ \cos\delta_2 \cos\delta_1 + \sin\delta_2 \sin\delta_1 = \cos\gamma_m \end{cases} \qquad (12)$$

Перетворимо дані рівняння, таким чином, що б в них не були присутні синуси, це дозволить позбавитися від коріння при зворотній підстановці

$$\begin{cases} \cos^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_1 - 2\cos\alpha_1\cos\alpha_2\cos\varphi_m + \cos^2\varphi_m = 1 \\ \cos^2\delta_2 + \cos^2\delta_1 - 2\cos\delta_1\cos\delta_2\cos\gamma_m + \cos^2\gamma_m = 1 \end{cases} \qquad (13)$$

Щоб отримати невідомі параметри механізму необхідно вирішити рівняння синтезу.

$$\begin{cases} \left[\dfrac{(a+c)^2+1-b^2}{2(a+c)}\right]^2+\left[\dfrac{(a-c)^2+1-b^2}{2(a-c)}\right]^2-2\left[\dfrac{(a+c)^2+1-b^2}{2(a+c)}\right]\times \\ \times\left[\dfrac{(a-c)^2+1-b^2}{2(a-c)}\right]\times\cos\varphi_m+(\cos\varphi_m)^2=1 \\ \dfrac{1-(c+a)\left[\dfrac{(a+c)^2+1-b^2}{2(a+c)}\right]}{b}+\dfrac{1+(c-a)\left[\dfrac{(a-c)^2+1-b^2}{2(a-c)}\right]}{b}-2\dfrac{1+(c+a)\left[\dfrac{(a+c)^2+1-b^2}{2(a+c)}\right]}{b}\times \\ \times\dfrac{1+(c-a)\left[\dfrac{(a-c)^2+1-b^2}{2(a-c)}\right]}{b}\times\cos\gamma_m+(\cos\gamma_m)^2=1 \end{cases} \quad (14)$$

Введемо для спрощення розрахунків наступну заміну перемінних:

$$\begin{gathered} \sin\varphi_m=x;\ \cos\varphi_m=y \\ \sin\gamma_m=f;\ \cos\gamma_m=g \end{gathered} \quad (15)$$

Спростимо рівняння (14) за допомогою заміни (15):

$$\begin{cases} \dfrac{a^2(a^2-c^2+1-b^2)}{(a^2-c^2)^2}-(1+y)\dfrac{((a-c)^2+1-b^2)\cdot((a+c)^2+1-b^2)}{2(a^2-c^2)}+y^2=1 \\ \left(\dfrac{1+b^2-(a-c)^2}{2b}\right)^2+\dfrac{1}{(2bf)^2}((a+c)^2-1-b^2+g(1+b^2-(a-c)^2))=1 \end{cases} \quad (16)$$

Згрупуємо рівняння (16) відносно b:

$$\begin{cases} b^4-2b^2(a^2+c^2+g)+\left[c^4+a^4+1-2(c^2+a^2)+2a^2c^2\dfrac{3+g}{1-g}\right]=0 \\ b^4-2b^2\left[\dfrac{c^2(1+c^2)(1+y)+a^2(1+a^2)(1-y)-2a^2c^2}{a^2+c^2+yc^2-ya^2}\right]+\left[2y+c^2-a^2)(c^2-a^2)+1\right]=0 \end{cases} \quad (17)$$

Вирішуємо систему (17) відносно параметру b

$$b=\sqrt{\frac{a^2+c^2+y(c^2-a^2)}{1-g}}\ .3\quad b=\sqrt{\frac{a^2+c^2+y(c^2-a^2)}{1-g}} \quad (18)$$

Перед коренем, у данному випадку, має стояти знак «+», тому що довжина b не може бути від’ємною.

Підставимо формулу (18) у перше з рівнянь (17) і згрупуємо його відносно параметру a :

$$a^4(g-y)^2 - 2a^2((yc)^2 + (cg)^2 - yg + yg^2 + 1 - g - 2c^2) +$$
$$+ (1 + 2y(cg)^2 + 2ygc^4 - 2g - 2c^2 + g^2 + c^4 g^2 + 2gc^2 - 2ygc^2 + y^2 c^4) = 0 \quad (19)$$

Вирішивши рівняння (19) як біквадратне, можна прийти до наступного результату:

$$a = \pm\sqrt{\frac{(yc)^2 + (cg)^2 - yg + yg^2 + 1 - g - 2c^2 \pm fx(g - 1 + 2c^2)}{(y-g)^2}} \quad (20)$$

Дана формула може мати чотири відповіді. Дві з них (з від’ємним значенням радикалу) можна відкинути відразу, тому що довжина a не може бути від’ємною. Третій же корінь є комплексним, тому що підкореневе вираження виходить негативним.

Виконавши підстановку (15) у рівняння (18) і (20), одержуємо підсумкові вираження для розрахунку довжини параметрів a і b:

$$a = \sqrt{\frac{-c^2(\sin^2\varphi_m + \sin^2\gamma_m) + (1 - \cos\varphi_m \cos\gamma_m)(1 - \cos\gamma_m) + \sin\varphi_m \sin\gamma_m (1 - \cos\gamma_m - 2c^2)}{(\cos\varphi_m - \cos\gamma_m)}}$$
$$b = \sqrt{\frac{a^2 + c^2 + \cos\varphi_m (c^2 - a^2)}{1 - \cos\gamma_m}} \quad (21)$$

У формулах (21), довжина c є вільним параметром, значення якої можна вибирати довільно у відносних одиницях стосовно довжини стійки d. В даному механізмі також можливо оптимізувати довжину c за величиною кута тиску μ.

Висновки

В роботі було запропоновано методику метричного синтезу чотириланковика за крайніми положеннями шатуна аналітичним методом. А використання при цьому ЕОМ полегшить проведення розрахунків і дозволить оптимізувати різноманітні критерії та врахувати більшу кількість кінематичних, динамічних та конструктивних обмежень.

Список використаних джерел

1. Артоболевский И. И. Теория механизмов и машин : учебник для втузов / И. И. Артоболевский. – 4-е изд., перераб. и доп. – М. : Наука, 1988. – 639 с. :

ил.

2. Левитская О. Н. Курс теории механизмов и машин [Текст] : учеб. пособие для механ. спец. вузов / О. Н. Левитская, Н. И. Левитский. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Высш. шк., 1985. – 279 с.

3. Кожевников С. Н. Основания структурного синтеза механизмов / С. Н. Кожевников. – К.: Наукова думка, 1979. – 232 с.

4. Решетов Л. Н. Конструирование рациональных механизмов / Л. Н. Решетов. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Машиностроение, 1972. – 256 с.

5. Теория механизмов и машин [Текст] : учеб. для высш. техн. учеб. заведений / К. В. Фролов [и др.] ; ред. К. В. Фролов. – М. : Высш. шк., 1987. – 496 с. : ил.

Малініна Ю.В. «Синтез шарнірного чотириланковика за крайніми положеннями шатуна».

В статті вирішується задача синтезу шарнірного чотириланковика за крайніми положеннями шатуна аналітичним методом.

Ключові слова: синтез, шарнірний чотириланковик, шатун, важільні механізми, крайні положення, рухливі ланки, кут розмаху, вільний параметр, відносна координата.

Малинина Ю.В. «Синтез шарнирного четырехзвенника по крайним положениям шатуна».

В статье решается задача синтеза шарнирного четырехзвенника по крайним положениям шатуна аналитическим методом.

Ключевые слова: синтез, шарнирный четырехзвенник, шатун, рычажные механизмы, крайние положения, подвижные звенья, угол размаха, свободный параметр, относительная координата.

Malinina J.V. «Synthesis joint four links on extreme positions of piston-rod».

In the article the task of synthesis of joint four links decides on extreme positions of piston-rod by an analytical method.

Key words: synthesis, hinges four links, a rod, lever mechanisms, extreme positions, mobile links, a scope corner, free parameter, relative co-ordinate.

Стаття надійшла до редакції 24 березня 2010 р.