

©Фидровская Н.Н.

КОНТАКТНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ЗОНЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ КАНАТА С БАРАБАНОМ

В зоне контакта тел, ограниченных криволинейными поверхностями, на относительно небольших площадках контакта возникают высокие местные напряжения, часто ведущие к остаточным деформациям и наклепу, что при наличии относительного скольжения вызывает выкрашивание поверхностей или «питтинг».

Вычисление напряжений, деформаций, перемещений в зоне контакта связано с определенными трудностями. Задача значительно упрощается в случае контакта эллиптических параболоидов. Решение этой задачи было получено Г. Герцем [1, 2].

На протяжении многих десятилетий оно используется в расчетах подшипников качения [3], зубчатых колес [4], ходовых колес [5] и др.

Исключительно широкое применение этого решения объясняется тем, что большинство цилиндрических и конических поверхностей на малом участке контакта могут быть аппроксимированы таким образом, что для соприкасающихся поверхностей можно принять:

$$\begin{aligned} Z_1 &= A_1x^2 + B_1x \cdot y + C_1y^2 \\ Z_2 &= A_2x^2 + B_2x \cdot y + C_2y^2 \end{aligned} \quad (1)$$

Таким образом, приходим к случаю Герца.

В случае контакта каната и барабана с нарезкой (рис. 1) мы имеем случай соприкосновения двух цилиндров.

Расстояние точек поверхностей, соответствующих одним и тем же значениям координат x и y будет [6]

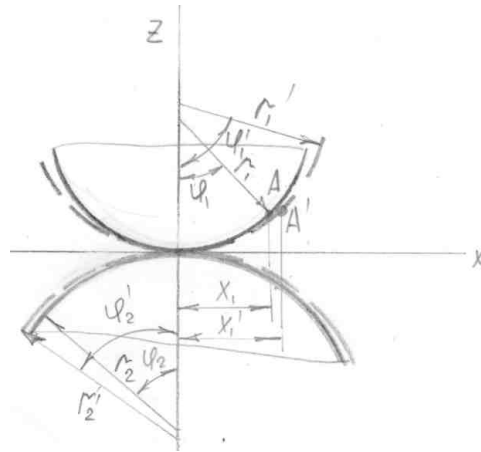


Рис. 1 – Контакт упругих тел

$$Z_1 + Z_2 = \frac{1}{2}(A_1 + A_2)x^2 + \frac{1}{2}(B_1 + B_2)x \cdot y + \frac{1}{2}(C_1 + C_2)y^2 \quad (2)$$

Можно выбрать такую систему координат, для которой уравнение (2) примет вид

$$Z_1 + Z_2 = Ax^2 + By^2 \quad (3)$$

Координаты А и В можно определить из системы уравнений [6]

$$\begin{cases} 2(A + B) = k_{11} + k_{12} + k_{21} + k_{22} \\ 2(A - B) = (k_{11} - k_{12}) \cos 2\gamma_1 + (k_{21} - k_{22}) \cos 2\gamma_2 \end{cases} \quad (4)$$

где k_{11}, k_{12} – кривизны главных нормальных сечений первой поверхности;
 k_{21}, k_{22} – кривизны главных нормальных сечений второй поверхности;
 γ_1 – угол между плоскостями XZ и плоскостью кривизны $k_{21}Z$.

Если через γ обозначить угол, образованный плоскостями Zk_{11} и Zk_{22} , то

$$\gamma_2 = \gamma + \gamma_1 \quad (5)$$

Тогда неизвестный угол γ_1 можно определить по формуле

$$\operatorname{tg} 2\gamma_1 = \frac{(k_{21} - k_{22}) \sin 2\gamma}{k_{11} - k_{21} + (k_{21} - k_{22}) \cos 2\gamma} \quad (6)$$

В случае если контакт происходит между канатом и канавкой барабана

(рис.1) будем иметь

$$k_{11}=1/r; k_{12}=1/R; k_{21}=1/r_2; k_{22}=1/R; \gamma=0; \gamma_1=\gamma_2 - \text{угол девиации каната,}$$

тогда

$$\begin{cases} 2(A+B) = \frac{1}{r_2} + \frac{1}{R} + \frac{1}{r_1} + \frac{1}{R} \\ 2(A-B) = \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{R}\right) \cos \gamma_1 + \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{R}\right) \cos \gamma_2 \end{cases}$$

или

$$A = \frac{1}{2R} (1 - \cos 2\gamma_1) + \frac{1}{4r_2} (1 + \cos 2\gamma_1) + \frac{1}{4r_1} (1 + \cos 2\gamma_1)$$

$$B = \frac{1}{2R} (1 + \cos 2\gamma_1) + \frac{1}{4r_1} (1 - \cos 2\gamma_1) + \frac{1}{4r_2} (1 - \cos 2\gamma_1)$$

Учитывая малость угла девиации ($\gamma \leq 3^0$) и соотношение $\frac{R}{r_1} = 18 \div 20$,
получаем

$$Z_1 = \frac{1}{2r_1} x^2 + \frac{1}{R} y^2$$

$$Z_2 = \frac{1}{2r_2} x^2 + \frac{1}{R} y^2$$

(7)

Нетрудно заметить, что при контакте двух тел криволинейной формы происходит изменение их кривизны не только в зоне контакта, но и в прилежащих областях. Радиусы кривизны в зоне контакта увеличиваются вплоть до $R=\infty$, т.е. мы будем иметь прямолинейные участки контакта. Следовательно, во внутренних слоях контактирующих тел вблизи площадки контакта будет происходить перераспределение материала не только в нормальном направлении, но и в касательном. Таким образом, мы будем иметь касательные деформации и касательные напряжения, что и подтверждено экспериментально [5].

Рассмотрим контакт каната и канавки барабана. Учитывая разницу модулей упругости каната и барабана можно предположить, что точка A_1

переместится в т. А₂, причем

$$\varphi_1 r_1 = r_2 \varphi_2 \quad (8)$$

Тогда проекция перемещений вдоль оси X будет равна

$$U_1 = x_1' - x_1 = r_2 \sin \varphi_2 - r_1 \sin \varphi_1 \quad (9)$$

где $\varphi_2 = (r_1/r_2) \varphi_1$.

По оси Z координата т. А₁ равна

$$Z_1 = r_1 - r_1 \cos \varphi_1 = r_1 (1 - \cos \varphi_1) \quad (10)$$

Переместившись в т. А₂ она примет координату

$$Z_1' = r_2 (1 - \cos \varphi_2) \quad Z_1' = r_2 (1 - \cos \varphi_2) \quad (11)$$

Сближение тел в этом случае будет равно

$$\alpha = Z_1 - Z_1' = r_1 (1 - \cos \varphi_1) - r_2 (1 - \cos \varphi_2) \quad (12)$$

Т.к. внутри поверхности давления для каждой пары соответствующих точек [6]

$$Z_1 + Z_2 + \gamma_1 + \gamma_2 = \alpha, \quad (13)$$

то получим

$$\begin{aligned} \gamma_1 + \gamma_2 &= r_1 (1 - \cos \varphi_1) - \frac{1}{2r_1} x^2 - \frac{2}{R} y^2 - \frac{1}{2r_2} x^2 = \\ &= r_1 (1 - \cos \varphi_1) - r_2 (1 - \cos \frac{r_1}{r_2} \varphi_1) - \frac{x^2}{r} (\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}) - \frac{2}{R} y^2 \end{aligned}$$

Полагая, что в зоне контакта поверхность каната займет точки поверхности канавки барабана, можно принять, что

$$\gamma_1 = \gamma_2 \quad (14)$$

Тогда

$$\gamma_1 = \frac{r_1}{r_2} (1 - \cos \varphi_1) - \frac{r_2}{2} (1 - \cos \frac{r_1}{r_2} \varphi_1) - \frac{x^2}{4} (\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}) - \frac{1}{R} y^2 \quad (15)$$

Составляем уравнение упругого равновесия

$$\begin{cases} \Delta^2 u + \frac{1}{1-2\mu} \cdot \frac{\partial \Delta}{\partial x} = 0 \\ \Delta^2 v + \frac{1}{1-2\mu} \cdot \frac{\partial \Delta}{\partial y} = 0 \\ \Delta^2 \omega + \frac{1}{1-2\mu} \cdot \frac{\partial \Delta}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (16)$$

где u, v, ω – проекции перемещений на координатные оси X,Y,Z;

μ – постоянная Пуассона;

$\Delta^2 u, \Delta^2 v, \Delta^2 \omega$ – операторы Лапласа

$$\Delta^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

Δ – объемное расширение

$$\Delta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial z}$$

Решая уравнение (16), получим

$$v = (1-2\mu)y \cdot \left[\frac{1}{R} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{z}{r_1(1-\cos\varphi)} + 1 \right) \right] \quad (17)$$

Определяем касательные напряжения на поверхности тел внутри контакта

$$x = G \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) = Gx \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) + \frac{1}{r_1(1-\cos\varphi_1)} \right] \quad (18)$$

$$y = G \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) = Gy \left[\frac{1}{R} + \frac{1-2\mu}{2r_1(1-\cos\varphi_1)} \right] \quad (19)$$

где G – модуль сдвига.

Нормальные напряжения внутри контура

$$z = 2G \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} + \frac{\mu}{1-2\mu} \Delta \right) = 2G \left[\frac{1}{2} \left(\frac{x}{r_1 \cdot \sin\varphi_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \right) \right]_3$$

$$z = 2G \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} + \frac{\mu}{1-2\mu} \Delta \right) = 2G \left[\frac{1}{2} \left(\frac{x}{r_1 \cdot \sin\varphi_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \right) \right] \quad (20)$$

Список использованных источников

1. Hertz H. Ueber die Berührung Fester Elastischer Körper / H. Hertz // Journal für die Reine und Angewandte Mathematik. – Berlin, 1881. – S. 156–171.
2. Hertz H. Druckkräfte in Einem Kreis Cylinder / H. Hertz // Gesammelte Werke. – Leipzig, 1895. – Bd. 1.
3. Бейзельман Р. Д. Подшипники качения : справочник / Р. Д. Бейзельман, Б. В. Цыпкин, Л. Я. Перель. – 6-е изд., испр. и доп. – М.: Машиностроение, 1975. – 574 с.
4. Решетов Д. Н. Детали машин : учеб для машиностроит. и механ. спец. вузов / Д. Н. Решетов. – 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Машиностроение, 1989. – 496 с.
5. Ковальский Б. С. Расчет деталей на местное сжатие / Б. С. Ковальский. – Х. : ХВКИУ, 1967. – 222 с.
6. Динник А. Н. Избранные труды. Т. 1 / А. Н. Динник. – К. : Изд-во АН УССР, 1952. – 152 с.

Фидровская Н.Н. «Контактные напряжения в зоне взаимодействия каната с барабаном».

В статье рассмотрено взаимодействие двух упругих тел с криволинейной поверхностью с учетом поперечных деформаций, которые возникают при изменении кривизны поверхности.

Ключевые слова: контактные напряжения, канат, барабан, упругое тело, криволинейная поверхность, деформация.

Фідровська Н.М. «Контактні напруження в зоні взаємодії каната з барабаном».

В статті розглянуто взаємодію двох пружних тіл з криволінійною поверхнею з урахуванням поперечних деформацій, які виникають при зміні кривизни поверхонь.

Ключові слова: контактні напруження, канат, барабан, пружне тіло, криволінійна поверхня, деформація.

Fidrovska N.M. “Contact tensions in the area of interaction of rope with a drum”.

In the article one considers the interaction of the spring objects with curve surfaces in the case of a deformation that appears while a curve of the surface changes.

Key words: Contact tensions, rope, drum, spring object, curve surface, deformation.

Стаття надійшла до редакції 12 травня 2010 р.