МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
УКРАЇНСЬКА ІНЖЕНЕРНО-ПЕДАГОГІЧНА АКАДЕМІЯ
НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ ПРОФЕСІЙНО-ПЕДАГОГІЧНИЙ ІНСТИТУТ
Кафедра загальноінженерних дисциплін

Ворох Андрій Олександрович

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ
З ДИСЦИПЛІНИ ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

Конспект лекцій для студентів заочної форми навчання
напряму 6.050503 "Машинобудування"

Харків

2012 р.

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
УКРАЇНСЬКА ІНЖЕНЕРНО-ПЕДАГОГІЧНА АКАДЕМІЯ
НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ ПРОФЕСІЙНО-ПЕДАГОГІЧНИЙ ІНСТИТУТ
Кафедра загальноінженерних дисциплін

Ворох Андрій Олександрович

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ
З ДИСЦИПЛІНИ ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

Конспект лекцій для студентів заочної форми навчання
напряму 6.050503 "Машинобудування"

Рекомендовано Науково-
методичною Радою
Української інженерно-
педагогічної академії
Протокол № 2
від 27.09.2012 р.

Харків 2012 р.

УДК 531.1/3(075)

Ворох Андрій Олександрович

Теоретична механіка: конспект лекцій для студентів заочної форми навчання, напрям 6.050503 "Машинобудування"/ А.О. Ворох. – Харків: УІПА, 2012. – 108 с.

Конспект лекцій з Теоретичної механіки призначений для студентів заочної форми навчання напряму 6.050503 "Машинобудування" і розрахований допомогти у підготовці до лекційних занять, доопрацюванні, розширенні конспектів, закріпленні знань, отриманих на лекціях, виділенні ключових моментів теоретичного курсу.

Рецензент: д.т.н. Кім Єн Дар

ЗМІСТ

Передмова ………………………………………………………………… 5
Лекція №1. Основні поняття і аксіоми статики…………………………… 7
Лекція №2. В'язі та їх реакції…………………………………...………... 13
Лекція №3. Система збіжних сил………………………………………… 17
Лекція №4. Моменти сили……..………………………………………….. 23
Лекція №5. Довільна просторова система сил..…………………………… 29
Лекція №6. Плоска система сил……………………………………….…. 35
Лекція №7. Завдання руху точки…………………..…………………….… 41
Лекція №8. Швидкість точки……………………………………….….…. 46
Лекція №9. Прискорення точки…………………………………………..… 50
Лекція №10. Обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої вісі…… 56
Лекція №11. Плоско-паралельний рух………… ………………………….. 62
Лекція №12. Динаміка точки…………………………………………….. 67
Лекція №13. Сили інерції………………………………………………… 72
Лекція №14. Осьовий момент інерції…………………………………..… 77
Лекція №15. Основні міри механічного руху матеріальної системи……. 82
Лекція №16. Загальні теореми динаміки………………………………….. 88
Лекція №17. Загальні теореми динаміки………………………………… 93
Лекція №18. Окремі випадки обчислення роботи………………………… 100

ПЕРЕДМОВА

Теоретична механіка відноситься до дисциплін природничо-наукового циклу підготовки інженерів за напрямом 6.050503 "Машинобудування". Метою викладання дисципліни є вивчення основних законів механіки, методів вивчення різних видів руху і рівноваги твердих тіл; формування фундаментальної бази теоретичних знань і практичних навичок бакалавра, що відповідають вимогам освітньо-кваліфікаційної характеристики спеціальності.

В результаті вивчення дисципліни студенти повинні

Знати: умови рівноваги та умови еквівалентності різних систем сил, методи визначення траєкторій, швидкостей та прискорень окремих точок і точок твердого тіла при різних видах руху, основні закони і теореми динаміки точки.

Вміти: складати рівняння рівноваги, визначати реакції в'язей, визначати швидкості та прискорення окремих точок і точок твердого тіла, яке здійснює поступальний, обертальний або плоский рухи, знаходити розв'язання задач динаміки точки, використовувати загальні теореми динаміки при розв'язанні технічних задач, пов'язаних з проектуванням, технологічними розрахунками, будівництвом і експлуатацією обладнання хімічних виробництв та підприємств будівельних матеріалів.

Конспект лекцій розроблено відповідно до робочої навчальної програми з дисципліни "Теоретична механіка" для студентів заочної форми навчання напряму 6.050503 "Машинобудування".

Даний конспект лекцій допоможе студенту у підготовці до лекційних і практичних занять, закріпленні, доопрацюванні та розширенні знань з теоретичного курсу. Конспект лекцій побудовано таким чином, щоб студент міг чітко з’ясувати освітню мету кожного окремого лекційного заняття, основні знання та вміння, які він повинен засвоїти в результаті вивчення лекційного матеріалу. Для закріплення знань наприкінці кожної лекції наводяться питання для самоперевірки, успішна відповідь на які забезпечить достатній рівень підготовки з дисципліни. З метою розширення лекційного матеріалу обов'язково наводяться літературні джерела з посиланнями на відповідні сторінки.

Вивчення теоретичної механіки є необхідною складовою підготовки інженера. Значною мірою реалізації завдання по якісній підготовці сучасного фахівця в галузі інженерії сприяють ґрунтовні, міцні, сучасні політехнічні знання та вміння застосовувати їх у практичній діяльності.

Лекція 1. Основні поняття і аксіоми статики

Мета: навчити свідомо оперувати основними поняттями і аксіомами статики.

Знати: цілі, задачі, аксіоми статики, поняття сили, види систем сил.

Вміти: використовувати аксіоми статики для розв’язання задач і виведення теорем.

План:

1. Основні поняття статики.
2. Аксіоми статики.

Зміст:

1. Статика – розділ теоретичної механіки, де вивчаються умови рівноваги матеріальних тіл та їх систем.

Рівновага – це стан покою тіла по відношенню до інших тіл.

Задачі статики: 1) Перетворити систему сил, яка діє на тіло, у простіші види; 2) Визначити умови рівноваги системи сил, що діє на тіло.

В статиці усі тіла розглядаються як абсолютно тверді – це такі тіла, відстань між точками яких не змінюється під впливом зовнішніх сил.

Сила – це міра механічної взаємодії матеріальних тіл.

Сила – величина векторна, її дія на тіло визначається модулем, напрямком і точкою прикладення.

[F] = [Н]

Лінія дії сили – це пряма, уздовж якої спрямована сила. Наприклад, сила $\overline{F}$ спрямована уздовж прямої DE.

Система сил – сукупність сил, що діють на тіло.

Еквівалентна система сил – це система сил, яка оказує на тіло таку ж дію, як і задана система сил (ці системи еквівалентні одна одній).

Урівноважена система сил (еквівалентна нулю) – це система сил, під дією якої вільне тверде тіло знаходиться у стані покою (рівноваги).

Урівноважуюча система сил – це система сил, після прикладення якої до тіла, на яке вже діють якісь сили, воно переходить у стан покою.

Рівнодійна сила – це сила, яка еквівалентна системі сил, прикладених до тіла. Тобто ця сила оказує на тіло таку ж дію, як і вся система заданих сил, яку можна замінити однією рівнодійною.

Зовнішні сили – це сили, які діють на тіло з боку інших тіл.

Внутрішні сили – сили взаємодії між частинами одного тіла.

Зосереджена сила – це сила, яка діє в одній точці тіла.

Розподілена сила – це сила, що діє на всі точки даного об’єму або частини поверхні тіла.

2. Аксіома 1: якщо на вільне тіло діють дві сили, то тіло може знаходитися у рівновазі тільки тоді, коли ці сили рівні за модулем, лежать на одній прямій і спрямовані у протилежні сторони. Такі сили утворюють урівноважену систему сил.

Аксіома 2: дія даної системи сил на абсолютно тверде тіло не зміниться, якщо до неї добавити або відняти урівноважену систему сил.

Наслідок з аксіоми 2: дія сили на абсолютно тверде тіло не зміниться, якщо перенести точку прикладення сили уздовж її лінії дії у будь-яку іншу точку тіла.

Ковзний вектор – це вектор, який можна переміщувати уздовж лінії його дії.

Вільний вектор – це вектор, який можна переміщувати у будь-яку точку тіла.

Прив'язаний вектор – це вектор, який можна прикласти тільки в одній точці тіла.

Аксіома 3 (закон паралелограма сил): дві сили, що прикладені до тіла в даній точці, мають рівнодійну, прикладену у той же точці і зображувану діагоналлю паралелограма побудованого на цих силах, як на сторонах.

$\overline{R} = \overline{F_1} + \overline{F}_2$ – це геометрична сума, а для визначення модуля рівнодійної використовують теорему косинусів: $R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + F_1 \cdot F_2 \cdot \cos\alpha}$, де α – це кут між напрямками сил $\overline{F_1}$ і $\overline{F}_2$.

За допомогою аксіоми 3 можна вирішити зворотну задачу: розкласти будь-яку силу на складові. Для цього необхідно знати напрямки висей, за якими необхідно розкласти задану силу, тоді на площині складові будуть сторонами паралелограма, в якому діагоналлю є задана сила. У випадку простору будують паралелепіпед, в якому діагоналлю є задана сила, а сторонами – складові сили. Складові сили є векторами.

При розв’язанні задач статики використовують проекції сил на координатні вісі. Для проектування сили у плоскій системі координат ХОУ будують прямокутник, сторони якого паралельні координатним висям, а діагоналлю є задана сила. В результаті сторони прямокутника будуть проекціями. При проектуванні сили на вісі просторової системи координат ХОУZ будують паралелепіпед, сторони якого паралельні координатним висям, а діагоналлю є задана сила. В результаті сторони паралелепіпеда є проекціями на відповідні вісі координат. Але на відміну від складових сили, проекції є скалярними величинами, так як для їх характеристики достатньо модуля і знака. Однак, для кращого розуміння схем навантаження проекції зручно зображати також стрілкою. Проекція буде від'ємною, якщо сила спрямована протилежно додатному напрямку заданої вісі координат. Для визначення числового значення проекції зручно знати гострий кут між силою і окремою віссю координат, тоді проекція буде дорівнювати добутку модуля сили на косинус цього кута.

$F_x = F\cdot\cos\alpha$; $F_y = -F\cdot\cos\beta$. $F_x = -F\cdot\cos\alpha$; $F_y = -F\cdot\cos\beta$; $F_z = F\cdot\cos\gamma$.

Аксіома 4 (закон рівності дії і протидії): кожній спрямованій дії одного матеріального тіла на інше відповідає така ж за модулем, але протилежна за напрямком протидія.

$$\overline{F} = -\overline{F}\ .$$

Із аксіоми 4 витікає головна властивість внутрішніх сил для твердого тіла – внутрішні сили урівноважені та не оказують дії на тіло, тому при розрахунках враховують тільки зовнішні сили, що впливають на дослідне тіло.

За допомогою аксіоми 4 визначають нормальну реакцію поверхні.

$$N = mg \cdot \cos\alpha.$$

Аксіома 5 (принцип затвердіння): рівновага нетвердого тіла, яке знаходиться під дією даної системи сил, не порушиться, якщо тіло вважати затверділим (абсолютно твердим).

Аксіома 5 застосовується при розрахунках ременів (ремінна передача), ланцюгів (ланцюгова передача), нитей, тросів, які не є твердими.

Контрольні запитання:

1. Що таке статика?
2. Які задачі статики?
3. Що таке рівновага?
4. Що таке сила?
5. Що таке абсолютно тверде тіло?
6. Що таке еквівалентна система сил?
7. Що таке рівнодійна сила?
8. Що таке урівноважена система сил?
9. Що таке урівновжуюча система сил?
10. Що таке зовнішня і внутрішня сили?
11. Що таке зосереджена і розподілена сила?
12. Як формулюється аксіома 1 статики?
13. Як формулюється аксіома 2 статики?
14. Який наслідок із аксіоми 2?
15. Як формулюється аксіома 3 статики?
16. Як формулюється аксіома 4 статики?
17. Як використовується аксіома 4?

18. Як формулюється аксіома 5 статики?
19. Які види векторів використовують у статиці?
20. Як розкласти силу на складові?
21. Як спроектувати силу на вісі координат?
22. Яка властивість внутрішніх сил?

Література:

1. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. Учеб. для вузов. – М.: Высшая школа, 1995. – С. 9-25.
2. Никитин Е.М. Курс теоретической механики. – М.: Наука, 1972. – С. 23-80

Лекція 2. В'язі та їх реакції

Мета: навчити звільнятися від в’язей.

Знати: принцип звільнення від в’язей; види в’язей та їх реакції.

Вміти: звільнятися від в'язей.

План:

1. Принцип звільнення від в'язей.
2. Види в'язей та їх реакції.

Зміст:

1. <u>В'язь</u> – це все те, що обмежує переміщення даного тіла у просторі.

Частіше за все в'язь – це інше тіло.

<u>Реакція в'язі</u> – це сила, з якою дана в'язь діє на тіло і обмежує при цьому його переміщення.

Спрямована реакція в'язі у бік, протилежний тому, куди в'язь не дає переміщуватись тілу.

<u>Вільне тіло</u> – це тіло, яке може здійснювати будь-які переміщення у просторі.

<u>Невільне тіло</u> – це тіло, переміщення якого у просторі обмежують інші скріпленні або що торкаються його тіла.

Вільне тіло у просторі у прийнятій прямокутній системі координат має шість незалежних переміщень – шість <u>ступенів вільності</u>: три переміщення уздовж висей і три обертання навколо цих висей. На площині залишається лише три ступені вільності: два переміщення уздовж висей і одне обертання на площині.

Будь-яка в'язь обмежує вільне переміщення тіла у просторі і робить його невільним.

Принцип звільнення від в'язей – обмеження, яке в'язь накладає на тіло, замінюють реакціями в'язі.

2. Розглянемо основні види в'язей та їх реакції.

1) Гладка площина (поверхня) або опора.

Термін “гладка“ вказує на відсутність у в'язі сил тертя. Реакція $\overline{N}$ гладкої поверхні або опори спрямована по загальній нормалі до поверхні торкання тіл у точці їх торкання і прикладена у тій же точці.

2) Шарнірно-стержневі системи і нитки.

Шарнір – це з'єднання двох тіл, при якому одне тіло може обертатися по відношенню до іншого навколо загальної вісі – вісь шарніру.

Реакція $\overline{N}$ нитки або стержня спрямована уздовж їх вісі до точки підвісу.

3) Плоска шарнірно-нерухома опора (циліндричний шарнір, підшипник). Циліндричний шарнір дозволяє обертання навколо вісі А, але не дозволяє переміщення уздовж висей ОХ і ОУ, тому реакції плоского нерухомого шарніру спрямовані по висях координат, отже маємо дві реакції – $\overline{R_{AX}}, \overline{R_{AY}}$.

4) Сферична шарнірно-нерухома опора (сферичний шарнір).

Ця опора дозволяє обертання навколо трьох висей координат і не дозволяє переміщення уздовж цих висей, тому після звільнення від в'язі залишається три реакції $\overline{R_{AX}}, \overline{R_{AY}}, \overline{R_{AZ}}$, спрямовані уздовж відповідних висей.

5) Плоска шарнірно-рухома опора.

Ця в'язь дозволяє обертання на площині, переміщення уздовж вісі ОХ, але не дозволяє переміщуватись уздовж вісі ОУ, тому замінюється однією реакцією $\overline{R_{AY}}$, спрямованою уздовж цієї вісі.

6) Жорстке закладення (консоль).

Ця в'язь не дозволяє переміщень уздовж висей ОХ та ОУ і не допускає обертання на площині. Тому в результаті звільнення від в'язі отримаємо дві реакції $\overline{R_X}, \overline{R_Y}$, що спрямовані уздовж висей координат, і опорний момент $M_{оп}$ (реактивний момент), який урівноважує момент від зовнішнього навантаження $\overline{F}$.

Контрольні запитання:

1. Що таке в'язь?
2. Що таке реакція в'язі?
3. Що таке вільне тіло?
4. Що таке невільне тіло?
5. Що таке ступінь вільності і яка їх кількість для просторової та плоскої систем?
6. У чому суть принципу звільнення від в'язей?
7. Як звільнятися від гладкої поверхні або опори?
8. Що таке шарнір?
9. Як звільнятися від шарнірно-стержневої системи?
10. Як звільнятися від плоскої шарнірно-нерухомої опори?
11. Як звільнятися від сферичної шарнірно-нерухомої опори?
12. Як звільнятися від плоскої шарнірно-рухомої опори?
13. Як звільнятися від консолі?

Література:

1. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. Учеб. для вузов. – М.: Высшая школа, 1995. – С. 37-40.

Лекція 3. Система збіжних сил

Мета: навчити спрощувати і визначати умови рівноваги системи збіжних сил.

Знати: методи визначення рівнодійної системи збіжних сил, умови рівноваги системи збіжних сил, теорему про три сили.

Вміти: спрощувати і складати рівняння рівноваги для системи збіжних сил.

План:

1. Рівнодійна системи збіжних сил.
2. Умови рівноваги системи збіжних сил.
3. Теорема про три сили.

Зміст:

1. Система збіжних сил – це система сил, лінії дії яких перетинаються в одній точці.

Вирішуючи одну з основних задач статики – спрощення заданої системи сил – визначають рівнодійну системи збіжних сил. Рівнодійну можна визначити двома способами: геометричний і аналітичний.

У свою чергу визначити рівнодійну геометричним способом можна за допомогою двох методів: метод паралелограма і метод силового багатокутника.

Метод паралелограма базується на аксіомі 3 статики. Сили складують попарно у довільній послідовності.

$$\overline{R_1} = \overline{F_1} + \overline{F_2};$$

$$\overline{R} = \overline{R_1} + \overline{F_3} = \overline{F_1} + \overline{F_2} + \overline{F_3}.$$

В загальному випадку записують $\overline{R} = \Sigma\overline{F_i}$ – рівнодійна дорівнює геометричній сумі усіх сил системи.

Недоліком методу паралелограма є завелика кількість допоміжних ліній, які ускладнюють розуміння схеми.

Перевага методу: дозволяє складати сили як на площині так і у просторі.

<u>Метод силового багатокутника</u>: для визначення рівнодійної системи збіжних сил необхідно у довільній послідовності перемістити усі сили за допомогою паралельного переносу так, щоб початок кожної наступної перенесеної сили співпадав з кінцем попередньої. Тоді рівнодійна буде проходити з початку першого вектору сили у кінець останнього перенесеного. В результаті отримують багатокутник сторонами якого є сили.

$$\boxed{\overline{R} = \Sigma\overline{F_i}}$$

Результатом використання будь-якого з геометричних методів буде однакова за модулем і напрямком рівнодійна $\overline{R}$.

Недоліком методу силового багатокутника є неможливість його використання у просторі.

Перевага методу – відсутність зайвих ліній.

<u>Аналітичний спосіб</u> визначення рівнодійної базується на <u>теоремі о проекції рівнодійної</u>: проекція рівнодійної на будь-яку нерухому координатну вість дорівнює сумі проекцій усіх складових сил системи на ту ж саму вісь.

R_X = ос = –оа + ав + вс = $–f_{1x} + f_{2x} + f_{3x}$.

На основі теореми о проекції рівнодійної можна записати:

$$\boxed{\begin{array}{l} R_x = \Sigma F_{ix}; \\ R_y = \Sigma F_{iy}; \\ R_z = \Sigma F_{iz}. \end{array}}$$

<u>Модуль рівнодійної</u>: $\boxed{R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}}$

Для визначення <u>напрямку рівнодійної</u> у просторі використовують <u>направляючі косинуси</u>:

$$\boxed{\begin{array}{l} \cos\alpha = R_x / R; \\ \cos\beta = R_y / R; \\ \cos\gamma = R_z / R. \end{array}}$$

де кути α, β, γ – це кути між напрямками рівнодійної і відповідно висей OX, OУ, OZ.

У випадку плоскої системи збіжних сил, де усі сили лежать в одній площині, залишається лише дві проекції рівнодійної і два направляючі косинуси:

$$R_x = \Sigma F_{ix};$$
$$R_y = \Sigma F_{iy}.$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

$$\cos\alpha = R_x / R;$$
$$\cos\beta = R_y / R.$$

2. Визначення рівнодійної дозволяє спростити систему збіжних сил. Надалі необхідно вирішити другу задачу статики – визначити умови рівноваги, тобто умови при яких тверде тіло під дією заданої системи сил буде знаходитися у рівновазі.

Умови рівноваги також записуються у двох формах: геометрична і аналітична.

Геометрична форма умов рівноваги системи збіжних сил: для рівноваги необхідно і достатньо, щоб геометрична сума усіх сил системи дорівнювала нулю. Графічно це виражається у замкнутості силового багатокутника, тобто остання перенесена сила попадає своїм кінцем у початок першої:

$$\Sigma \overline{F_i} = 0$$

Аналітична форма умов рівноваги системи збіжних сил: для рівноваги необхідно і достатньо, щоб суми проекцій усіх сил системи на координатні вісі дорівнювали нулю:

$$\Sigma F_{ix} = 0;$$
$$\Sigma F_{iy} = 0;$$
$$\Sigma F_{iz} = 0.$$

– умови рівноваги для просторової системи збіжних сил.

$$\boxed{\begin{aligned} \Sigma F_{ix} &= 0; \\ \Sigma F_{iy} &= 0. \end{aligned}}$$ – умови рівноваги для плоскої системи збіжних сил.

3. При розв’язанні задач статики інколи зручно використовувати <u>теорему про три сили</u>: якщо тверде тіло знаходиться у рівновазі під впливом трьох непаралельних сил, що лежать в одній площині, то лінії дії цих сил перетинаються в одній точці.

<u>Доказ</u>: розглянемо плоску систему трьох непаралельних сил $\overline{F_1}, \overline{F_2}, \overline{F_3}$, під дією яких тіло знаходиться у стані рівноваги. Візьмемо дві будь-які сили, наприклад, $\overline{F_1}, \overline{F_2}$. Так як за умовою задачі ці сили не паралельні, то вони перетинаються у деякій точці А. Використаємо аксіому 3 і методом паралелограма визначимо рівнодійну цих сил $\overline{R} = \overline{F_1} + \overline{F_2}$. В результаті маємо, що тіло знаходиться під впливом двох сил $\overline{R}$ і $\overline{F_3}$ у стані рівноваги. Але за аксіомою 1 статики це можливо лише тоді, коли ці сили лежать на одній прямій. Значить сил $\overline{F_3}$ також проходить через точку А, що і вимагалося довести.

Теорема про три сили окреслює тільки необхідну умову рівноваги тіла, що знаходиться під впливом плоскої системи трьох збіжних сил. Але це недостатня умова, так як під впливом трьох збіжних сил на площині тіло може і не знаходитися у стані рівноваги. Тому зворотна теорема не буде вірною.

Використання теореми про три сили дозволяє наперед визначити як проходять задані три сили на площині, під впливом яких дослідне тіло знаходиться у стані рівноваги. Наприклад, для кулі наперед відомо, що сила натягу ниті $\overline{N}$, сила тяжіння $\overline{P}$ і сила реакції гладкої поверхні $\overline{R}$ проходять через одну точку С – центр кулі.

Контрольні запитання:

1. Що таке система збіжних сил?
2. Як визначити рівнодійну системи збіжних сил геометричним способом?
3. У чому суть методу силового багатокутника?
4. Як визначити рівнодійну аналітичним способом?
5. Що таке направляючі косинуси?
6. Як формулюється теорема про проекцію рівнодійної?
7. Що таке умови рівноваги?
8. Які умови рівноваги системи збіжних сил в геометричній формі?
9. Які умови рівноваги системи збіжних сил в аналітичній формі?
10. Як формулюється теорема про три сили?

Література:

1. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. Учеб. для вузов. – М.: Высшая школа, 1995. – С. 14-31.
2. Никитин Е.М. Курс теоретической механики. – М.: Наука, 1972. – С. 134-145.

Лекція 4. Моменти сили

Мета: навчити визначати моменти сили.

Знати: поняття і види моменту сили.

Вміти: визначати моменти сили.

План:

1. Момент сили відносно центру.
2. Момент сили відносно вісі.
3. Момент пари сил.

Зміст:

1. Момент характеризує обертальний ефект сили.

Центр моменту сили – це точка, відносно якої визначається момент.

Момент сили відносно центра О – це вектор $\overline{M_o}(\overline{F})$, модуль якого дорівнює добутку модуля сили F на її плече h і який спрямований перпендикулярно площині, що проходить через центр О і силу $\overline{F}$. Бік напрямку вектор-моменту $\overline{M_o}(\overline{F})$ визначається правилом буравчика.

Плече сили h – це перпендикуляр, опущений із центра О, відносно якого визначається момент сили, на лінію дії сили $\overline{F}$.

Правило буравчика – буравчик ставиться у центр О, відносно якого визначається момент сили, перпендикулярно площині, що проходить через силу $\overline{F}$ і центр О. Обертання буравчика проводять у тому напрямку, куди сила $\overline{F}$ намагається обертати плече h відносно центра О (в нашому випадку – проти ходу часової стрілки). Тоді рух буравчика покаже напрямок вектор-моменту $\overline{M_o}(\overline{F})$ (в нашому випадку буравчик буде викручуватися із площини, що проходить через силу $\overline{F}$ і центр О, значить вектор-момент $\overline{M_o}(\overline{F})$ буде видимим).

Вектор-момент записується як векторний добуток сили $\overline{F}$ на радіус вектор $\overline{r_A}$ точки її прикладення відносно заданого центру О.

$$\overline{M_o}(\overline{F}) = \overline{F} \times \overline{r}_A .$$

Модуль цього векторного добутку дорівнює:

$$M_O(\overline{F}) = F\cdot r_A\cdot \sin\alpha = F\cdot h; \rightarrow$$

$\boxed{M_O(\overline{F}) = F\cdot h}$ – модуль моменту сили дорівнює добутку модуля сили на її плече.

Момент сили відносно центру – це прив'язаний вектор, тобто може бути прикладений тільки у центрі О, відносно якого визначається момент.

<u>Властивості моменту сили відносно центру</u>: 1) момент сили відносно центру не змінюється при переносі точки прикладення сили уздовж її лінії дії; 2) момент сили відносно центру О дорівнює нулю, якщо сила дорівнює нулю або лінія дії сили проходить через цей центр О (плече сили дорівнює нулю).

2. Щоб визначити момент сили відносно вісі, необхідно цю силу проектувати на перпендикулярну до всі площину і визначити момент проекції сили відносно точки перетину вісі та площини.

В результаті сили $\overline{F}$ розкладається на дві складові: $\overline{F}^{'}$ і $\overline{F}^{''}$. Складова $\overline{F}^{'}$ дає момент відносно вісі обертання OZ і величина якого дорівнює:

$\boxed{M_z = F^{'} \cdot h}$ – <u>момент сили відносно вісі</u> – це скалярна величина, тому що вона не має власного напрямку, а визначається напрямком вісі і дорівнює добутку модуля F' проекції сили на перпендикулярну до вісі площину на плече сили h відносно точки О перетину вісі з цією площиною.

Для характеристики моменту відносно вісі достатньо модуля і знаку (“плюс“ – “мінус“).

<u>Правило знаків</u> – момент сили відносно вісі вважається додатнім, якщо при погляді з додатного напрямку вісі сила $\overline{F}'$ прагне повернути плече h проти ходу часової стрілки.

В нашому випадку момент від'ємний:

$$\boxed{M_z = -F' \cdot h = (F \cdot \cos\alpha) \cdot h}$$

, де α – це кут між силою $\overline{F}$ і перпендикулярною до вісі OZ площиною.

<u>Властивості моменту сили відносно вісі</u>: 1) місце проведення перпендикулярної до вісі площини не має значення, так як проекції сили на паралельні площини і плечі проекцій сили у всіх випадках однакові; 2) момент дорівнює нулю, якщо сила паралельна вісі (проекція $\overline{F}'=0$) або перетинає вісь (h=0).

3. <u>Пара сил</u> – це система двох рівних за модулем, паралельних і протилежно спрямованих сил, що діють на тверде тіло.

Система сил $\overline{F}'$ і $\overline{F}$, що утворюють пару, не знаходиться у рівновазі (ці сили не спрямовані уздовж однієї прямої). В той же час пара сил не має рівнодійної, оскільки їх геометрична сума дорівнює нулю. Тому пару сил розглядають як окремий вид механічної взаємодії тіл.

<u>Площина дії пари</u> – це площина, яка проходить через лінії дії сил пари.

<u>Плече пари</u> – це відстань h між лініями дії сил пари.

Дія пари сил на тверде тіло зводиться до деякого обертального ефекту, який характеризується моментом пари $\overline{M}$.

Момент пари сил – це вектор $\overline{M}$, модуль якого дорівнює добутку модуля однієї з сил пари на її плече і який спрямований перпендикулярно площині дії пари відповідно до правила буравчика.

$\boxed{M = F' \cdot h = F \cdot h}$ – модуль моменту пари сил.

Властивості моменту пари:

1) Так як плече сили $\overline{F}$ відносно точки А дорівнює h, а площина, що проходить через точку А і силу $\overline{F}$, співпадає з площиною дії пари, то момент пари дорівнює моменту будь-якої сили з цієї пари відносно точки прикладення іншої сили:

$\overline{M} = \overline{M}_B(\overline{F}) = \overline{M}_A(\overline{F}')$.

Проте, на відміну від моменту сили відносно центру, момент пари – це вільний вектор, тобто може бути прикладений у будь-якій точці.

2) Момент пари можна визначити як суму моментів відносно будь-кого центру О сил, що утворюють пару:

$\overline{M} = \overline{M}_O(\overline{F}) + \overline{M}_O(\overline{F}')$. (1)

Доказ: визначимо модулі моментів сил $\overline{F}'$ і $\overline{F}$ відносно центра О і складемо їх: $M_O(\overline{F}) + M_O(\overline{F}') = -F \cdot h_1 - F' \cdot h_1' = -F \cdot (h_1 + h_1') = -F \cdot h = M \rightarrow$ в результаті отримали модуль моменту пари. Так як моменти $\overline{M}$, $\overline{M}_O(\overline{F})$, $\overline{M}_O(\overline{F}')$ проходять перпендикулярно одній площині і мають однакові напрямки обертання у ній, то вектора цих моментів співпадають також і за напрямком.

3) Із аналізу формули (1) витікає, що механічна дія пари на тверде тіло не зміниться, якщо її перенести в будь-яке місце площини дії пари.

4) Пару сил можна перенести із даної площини в будь-яку іншу, паралельну даній, без зміни її дії на тверде тіло.

5) Дія даної пари на тверде тіло не зміниться, якщо поміняти величину сил пари або плече, залишивши незмінним її момент.

Еквівалентні пари сил – це пари, які мають однакові моменти.

Систему пар сил, що діють на тверде тіло можна замінити однією парою, момент якої дорівнює геометричній сумі моментів усіх пар системи:

$$\boxed{\overline{M} = \overline{M}_1 + \overline{M}_2 + \ldots + \overline{M}_n = \Sigma \overline{M}_i}$$

Умова рівноваги системи пар: для того, щоб тіло знаходилося у стані рівноваги під впливом системи пар сил, геометрична сума моментів цих пар повинна дорівнювати нулю:

$$\boxed{\overline{M} = \Sigma \overline{M}_i = 0}$$

Контрольні запитання:

1. Що таке момент сили відносно заданого центру?
2. Що таке плече сили?
3. Як визначають напрямок вектор-моменту?
4. Чому дорівнює модуль моменту сили відносно даного центру?
5. Які властивості моменту сили відносно центру?
6. Як визначають момент сили відносно вісі?
7. Які властивості моменту сили відносно вісі?
8. Яке правило знаків для моменту сили відносно вісі?
9. Що таке пара сил?
10. Чому дорівнює момент пари сил за модулем?
11. Які властивості моменту пари?
12. Яка умова рівноваги системи пар?

Література:

1. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. Учеб. для вузов. – М.: Высшая школа, 1995. – С. 31-35.
2. Никитин Е.М. Курс теоретической механики. – М.: Наука, 1972. – С. 84-94.

Лекція 5. Довільна просторова система сил

Мета: навчити спрощувати і визначати умови рівноваги довільної просторової системи сил.

Знати: умови рівноваги довільної системи сил у просторі, теорему Пуансо, поняття головного вектора і головного моменту системи сил, теорему Варіньона.

Вміти: приводити довільну просторову систему сил до заданого центру, складати рівняння рівноваги.

План:

1. Теорема Пуансо.
2. Приведення системи сил к даному центру.
3. Умови рівноваги системи сил.
4. Теорема Варіньона.

Зміст:

1. Рівнодійна системи збіжних сил знаходиться по закону паралелограма або силового багатокутника. Аналогічну задачу можна вирішити і для довільної просторової системи сил, якщо знайти для неї метод, який дозволяє перенести усі сили в одну точку. Такий метод дає теорема Пуансо: силу, прикладену до абсолютно твердого тіла, можна, не змінюючи її дії, перенести із даної точки у будь-яку іншу точку тіла, якщо прибавити пару з моментом, що дорівнює моменту перенесеної сили відносно точки, куди сила переноситься.

Нехай на тверде тіло діє сила $\overline{F}$, прикладена в точці А. Дія цієї сили не зміниться, якщо в будь-якій точці В тіла прикласти дві урівноважені сили $\overline{F}'$ і $\overline{F}''$, при чому $\overline{F}'=\overline{F}$, $\overline{F}''=-\overline{F}$. Отримана система трьох сил представляє собою: силу $\overline{F}' = \overline{F}$, але прикладену у точці В і пару сил $\overline{F}, \overline{F}''$ з моментом $\overline{M} = \overline{M}_B(\overline{F})$.

2. Приведемо довільну систему сил до заданого центру, тобто замінимо дану систему сил іншою, їй еквівалентною, але значно простішою.

Нехай на задане тверде тіло діє довільна система сил $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots, \overline{F}_n$. Виберемо довільну точку О і приймемо її за центр приведення. Використовуючи теорему Пуансо, виконаємо перенос усіх сил у центр О. При цьому добавляємо відповідні пари. Тоді на тіло буде діяти система сил $\overline{F}_1' = \overline{F}_1$, $\overline{F}_2' = \overline{F}_2$, … , $\overline{F}_n' = \overline{F}_n$, які прикладені в центрі О, і система пар сил, моменти яких дорівнюють $\overline{M}_1 = \overline{M}_O(\overline{F}_1)$, $\overline{M}_2 = \overline{M}_O(\overline{F}_2)$, … , $\overline{M}_n = \overline{M}_O(\overline{F}_n)$.

Збіжні сили, прикладені в точці О, замінюють однією силою $\overline{R}$ – це головний вектор системи сил – дорівнює геометричній сумі усіх сил системи.

Головний вектор, як і будь-який вектор, можна визначити через його проекції на вісі координат:

$$\boxed{\overline{R} = \Sigma \overline{F}'_i = \Sigma \overline{F}_i}$$

$$\boxed{\begin{aligned} R_x &= \Sigma F_{ix}; \\ R_y &= \Sigma F_{iy}; \\ R_z &= \Sigma F_{iz}. \end{aligned}}$$

Модуль головного вектора:

$$\boxed{R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}}$$

Для визначення напрямку головного вектора у просторі використовують направляючі косинуси:

$$\cos\alpha = R_x / R;$$
$$\cos\beta = R_y / R;$$
$$\cos\gamma = R_z / R.$$

де кути α, β, γ – це кути між напрямками головного вектора і відповідно висей ОХ, ОУ, OZ.

Щоб скласти усі отримані пари, необхідно скласти вектори моментів цих пар. В результаті система пар заміниться однією парою, момент якої $\overline{M}_o$ – це головний момент системи сил відносно центра О – дорівнює геометричній сумі моментів усіх сил системи відносно центра О.

$$\overline{M}_o = \Sigma \overline{M}_i = \Sigma \overline{M}_O(\overline{F}_i)$$

Головний момент можна визначити у проекційній формі:

$$M_x = \Sigma M_x(\overline{F}_i);$$
$$M_y = \Sigma M_y(\overline{F}_i);$$
$$M_z = \Sigma M_z(\overline{F}_i).$$

Модуль головного моменту: $M_o = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}$

Для визначення напрямку головного моменту у просторі використовують направляючі косинуси:

$$\cos\alpha_1 = M_x / M_0;$$
$$\cos\beta_1 = M_y / M_0;$$
$$\cos\gamma_1 = M_z / M_0.$$

де кути α_1, β_1, γ_1 – це кути між напрямками головного моменту і відповідних висей ОХ, ОУ, OZ.

Теорема о приведенні сил: будь-яка система сил, діючих на абсолютно тверде тіло, при приведенні до довільно обраного центру О замінюється однією силою $\overline{R}$, що дорівнює головному вектору системи сил і прикладена у центрі приведення О, і однією парою з моментом $\overline{M}_o$, що дорівнює головному моменту системи сил відносно центра О.

При цьому сила $\overline{R}$ не є рівнодійною даної системи сил, так як замінює систему сил не одна, а разом з парою.

Дві системи сил, які мають однакові головні вектори і головні моменти відносно одного і того ж центру, еквівалентні (умова еквівалентності систем сил).

Значення $\overline{R}$ від обраного центру не залежить. Значення $\overline{M}_o$ при зміні положення центра О може в загальному випадку змінюватись внаслідок зміни значень моментів окремих сил. Тому необхідно завжди вказувати, відносно якого центру визначається головний момент.

Приватні випадки приведення довільної просторової системи сил: 1) якщо для даної системи сил $\overline{R}=0$, $\overline{M}_o \neq 0$, то вона приводиться до однієї пари сил з моментом $\overline{M}_o$. В цьому випадку значення $\overline{M}_o$ не залежить від обраного центра О, так як інакше би одна й таж сама система сил замінювалася різними нееквівалентними друг другу парами, що неможливо; 2) якщо для даної системи сил $\overline{R} \neq 0$, $\overline{M}_o=0$, то вона приводиться до однієї сили, тобто до рівнодійної $\overline{R}$, що прикладена у центрі О.

3. Для рівноваги будь-якої системи сил необхідно і достатньо, щоб головний вектор цієї системи сил і її головний момент відносно будь-якого центра були рівні нулю, тобто щоб виконувалась умова:

– це умова рівноваги довільної просторової системи сил у векторній формі.

При цьому ця умова рівноваги залишається справедливою при будь-якому положенні центра О, так як при $\overline{R}=0$ значення $\overline{M}_o$ від обраного центру О не залежить.

$$\boxed{\overline{R}=0,\ \overline{M}_o=0} \quad (1)$$

Умова (1) є необхідною, так як якщо будь-яка з них не виконується, то система діючих на тіло сил приводиться або до рівнодійної ($\overline{R} \neq 0$), або до пари сил ($\overline{M}_o \neq 0$), тобто не є урівноваженою. Одночасно умова (1) є і достатньою, тому що при $\overline{R}$ =0 система сил може приводитися тільки до пари з моментом $\overline{M}_o$, а так як $\overline{M}_o$ =0, то має місце рівновага.

$$\boxed{\Sigma\overline{M}_O(\overline{R}) = \Sigma\overline{M}_O(\overline{F_i})}$$

Якщо умову (1) спроектувати на координатні вісі, то отримаємо умови рівноваги довільної просторової системи сил в проекційній формі:

– для рівноваги необхідно і достатньо, щоб сума проекцій усіх сил системи на координатні вісі і сума моментів цих сил відносно координатних висей дорівнювали нулю.

$$\boxed{\begin{array}{l} \Sigma F_{ix} = 0;\ \Sigma M_{ix} = 0; \\ \Sigma F_{iy} = 0;\ \Sigma M_{iy} = 0; \\ \Sigma F_{iz} = 0;\ \Sigma M_{iz} = 0. \end{array}}$$

4. Теорема Варіньона о моменті рівнодійної: якщо дана система сил має рівнодійну, то момент рівнодійної відносно будь-якого центра О дорівнює сумі моментів сил системи відносно цього ж центра.

Доведемо: нехай система сил $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, … , $\overline{F}_n$ приводиться до рівнодійної $\overline{R}$, лінія дії якої проходить через деяку точку С. Прикладемо в цій точці силу $\overline{R}' = -\overline{R}$. Тоді система сил $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, … , $\overline{F}_n$, $\overline{R}'$ буде знаходитися у рівновазі і для неї повинна виконуватись умова $\overline{M}_o$=0, тобто $\Sigma\overline{M}_O(\overline{F_i}) + \Sigma\overline{M}_O(\overline{R}')$=0. Але так як $\overline{R}' = -\overline{R}$ і обидві сили спрямовані уздовж однієї і тієї ж прямої, то $\overline{M}_O(\overline{R}') = -\overline{M}_O(\overline{R})$. Підставимо це значення $\overline{M}_O(\overline{R}')$ в попереднє рівняння і знайдемо з нього: $\Sigma\overline{M}_O(\overline{F_i}) - \Sigma\overline{M}_O(\overline{R})$=0→

– теорема Варіньона.

Контрольні запитання:

1. Як можна перенести силу до заданого центру без зміни її дії на тіло?
2. Як формулюється теорема Пуансо?
3. Яка послідовність дій під час приведення довільної просторової системи сил до заданого центру?
4. Як визначити головний вектор у векторній і проекційній формі?
5. Як визначити головний момент у векторній і проекційній формі?
6. Як формулюється теорема про приведення довільної просторової системи сил до заданого центру?
7. Як залежать головний момент і головний вектор від обраного центру приведення?
8. Які бувають випадки приведення довільної просторової системи сил?
9. Які умови рівноваги довільної просторової системи сил у векторній формі?
10. Які умови рівноваги довільної просторової системи сил у проекційній формі?
11. Як формулюється теорема Варіньона?

Література:

1. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. Учеб. для вузов. – М.: Высшая школа, 1995. – С. 37-53.
2. Никитин Е.М. Курс теоретической механики. – М.: Наука, 1972. – С. 87-120.

Лекція 6. Плоска система сил

Мета: навчити спрощувати і визначати умови рівноваги плоскої системи довільно розташованих і паралельних сил.

Знати: поняття алгебраїчного моменту, умови рівноваги плоских систем паралельних і довільно розташованих сил.

Вміти: складати рівняння рівноваги і спрощувати плоску систему довільно розташованих і паралельних сил.

План:

1. Алгебраїчні моменти сили і пари.
2. Приведення плоскої системи сил.
3. Рівновага довільної плоскої системи сил.
4. Плоска система паралельних сил.

Зміст:

1. Плоска система сил – це сукупність сил, що розташовані в одній площині.

Коли усі сили системи лежать в одній площині, їх моменти відносно будь-якого центра O, який знаходиться в цій же площині, перпендикулярні цій площині, тобто спрямовані уздовж однієї прямої. Тоді, не використовуючи векторів, можна напрямок цих моментів відрізнити один від одного по знаку і розглядати момент сили $\overline{F}$ відносно центра O як алгебраїчну величину – $M_O(\overline{F})$ – <u>алгебраїчний момент сили</u> $\overline{F}$ відносно центра O дорівнює узятому з відповідним знаком добутку модуля сили на її плече, тобто:

$$\boxed{M_O(\overline{F}) = \pm F \cdot h}$$

<u>Правило знаків</u>: момент вважається додатнім, коли сила прагне повернути тіло навколо центра O проти ходу часової стрілки і від'ємним – коли за ходом часової стрілки.

$$M_O(\overline{P}) = -P \cdot h_2;$$

$$M_O(\overline{Q}) = Q \cdot h_1.$$

Оскільки момент пари сил дорівнює моменту однієї з її сил відносно точки прикладення іншої сили, то для пар, які лежать в одній площині, момент пари можна також розглядати як алгебраїчну величину.

Алгебраїчний момент пари M – це скалярна величина, яка дорівнює узятому з відповідним знаком добутку модуля однієї з сил пари на плече пари:

$$\boxed{M = \pm F \cdot h}$$

Правило знаків таке ж саме, як і для моменту сили.

$$M_1 = -P \cdot h_2;$$

$$M_2 = Q \cdot h_1.$$

Оскільки пара сил характеризується тільки її моментом, то пару зображають дуговою стрілкою, яка показує напрямок обертання пари.

2. Для плоскої системи сил залишається справедливою теорема Пуансон. Тобто плоска система сил також приводиться до головного вектору $\overline{R}$, що прикладений у вибраному центрі O, і пари сил з головним моментом M_O, при цьому $\overline{R}$ і M_O лежать в одній площині – площина дії сил.

$$\boxed{\overline{R} = \Sigma \overline{F_i}; \; M_O = \Sigma M_O(\overline{F_i}).}$$

При цьому вектор $\overline{R}$ можна визначити геометрично методом силового багатокутника або аналітично через проекції на вісі координат.

Таким чином для плоскої системи сил в аналітичній формі можна записати:

$$\boxed{R_x = \Sigma F_{ix};\; R_y = \Sigma F_{iy};\; M_O = \Sigma M_O(\overline{F_i}).}$$

Якщо плоска система сил не знаходиться у рівновазі, то вона може бути приведена к трьом випадкам в залежності від значень $\overline{R}$ і M_O:

1) якщо для даної системи сил $\overline{R}=0$, $M_O \neq 0$, то вона приводиться до однієї пари з моментом M_O, значення якого не залежить від обраного центра;

2) якщо для даної системи сил $\overline{R} \neq 0$, $M_O=0$, то вона приводиться до рівнодійної $\overline{R}$, що проходить через центр О;

3) якщо $\overline{R} \neq 0$, $M_O \neq 0$, то пару з моментом M_O можна зобразити двома силами $\overline{R}'$ і $\overline{R}''$, при цьому $\overline{R}' = \overline{R}$, $\overline{R}'' = -\overline{R}$, тоді $M_O = R \cdot h$ (1).

Відкинемо сили $\overline{R}$ і $\overline{R}''$ як урівноважені, при цьому вся система сил заміниться рівнодійною $\overline{R}'$ $=\overline{R}$, яка проходить через точку С. положення

$$\boxed{\overline{R}=0,\; M_o=0}$$

точки С визначається двома умовами: 1) відстань ОС = h (ОС $\perp \overline{R}$) повинна задовольняти рівнянню (1); 2) знак моменту відносно центра О сили $\overline{R}'$, яка прикладена в точці С, тобто $M_O(\overline{R}')$, повинен співпадати із знаком M_O.

3. Необхідними і достатніми умовами рівноваги плоскої довільної системи сил у векторній формі є рівність нулю головного вектора і головного моменту системи:

Ці умови можна отримати у проекційному вигляді, якщо спроектувати головний вектор $\overline{R}$ на координатні вісі.

1) Основна форма умов рівноваги плоскої довільної системи сил: для рівноваги необхідно і достатньо, щоб суми проекцій усіх сил системи на кожну з двох координатних висей і сума їх моментів відносно будь-якого центру, що лежить в площині дії сил, були рівні нулю.

$$\boxed{\Sigma F_{ix} = 0;\ \Sigma F_{iy} = 0;\ \Sigma M_O(\overline{F_i}) = 0.} \quad (2)$$

2) Друга форма умов рівноваги плоскої довільної системи сил: для рівноваги необхідно і достатньо, щоб суми моментів усіх сил системи відносно будь-яких двох центрів А і В, і сума їх проекцій на вісь ОХ, що не перпендикулярна прямій АВ, були рівні нулю.

$$\boxed{\Sigma F_{ix} = 0;\ \Sigma M_A(\overline{F_i}) = 0;\ \Sigma M_B(\overline{F_i}) = 0.} \quad (3)$$

Доведемо достатність цих умов. Якщо для даної системи сил виконуються тільки умови $\Sigma M_A(\overline{F_i}) = 0$; $\Sigma M_B(\overline{F_i}) = 0$, то така система може мати рівнодійну $\overline{R}$, яка буде одночасно проходити через точки А і В (момент відносно таких точок дорівнює нулю). Але остання умова $\Sigma F_{ix} = 0$, якщо вісь ОХ не перпендикулярна відрізку АВ, може бути виконана тільки тоді, коли $\overline{R}$ =0, тобто коли система знаходиться у рівновазі.

3) Третя форма умов рівноваги (рівняння трьох моментів): для рівноваги необхідно і достатньо, щоб суми моментів усіх сил системи відносно будь-яких трьох центрів А, В, С, що не лежать на одній прямій, були рівні нулю.

$$\boxed{\Sigma M_A(\overline{F_i}) = 0;\ \Sigma M_B(\overline{F_i}) = 0;\ \Sigma M_C(\overline{F_i}) = 0.}$$

Достатність цих умов слідує із того, що якщо при одночасному виконанні цих умов дана система сил не знаходилась би у рівновазі, то вона повинна мати рівнодійну $\overline{R}$, яка проходила би одночасно через точки А, В, С, але вони не лежать на одній прямій, тому це неможливо. Отже має місце рівновага.

У всіх розгляне них випадках для плоскої системи сил маємо три умови рівноваги. Умови рівноваги (2) вважають основними, маг як при їх використанні не накладається обмежень на вибір координатних висей і центра моментів.

4. При розгляданні плоскої системи паралельних сил вісь ОХ спрямовують перпендикулярно лініям дії сил системи, а вісь ОУ паралельно їм. Тоді проекція кожної з сил на вісь ОХ буде дорівнювати нулю і перше рівняння умов рівноваги (2) обернеться в тотожність $0 \equiv 0$. В результаті для паралельних сил залишиться дві умови рівноваги в основній формі:

$\boxed{\Sigma F_{iy} = 0;\ \ \Sigma M_O(\overline{F_i}) = 0.}$ – для рівноваги необхідно і достатньо, щоб суми проекцій усіх сил системи на координатну вісь ОУ і сума їх моментів відносно будь-якого центру О, що лежить в площині дії сил, були рівні нулю.

На основі аналогічних роздумів із рівнянь рівноваги (3) отримаємо другу форму умов рівноваги для плоскої системи паралельних сил: для рівноваги необхідно і достатньо, щоб суми моментів усіх сил системи відносно будь-яких двох центрів А і В, були рівні нулю. При цьому відрізок АВ не повинен бути перпендикулярним вісі ОХ, тобто паралельним лініям дії сил системи.

$$\boxed{\Sigma M_A(\overline{F_i}) = 0;\ \ \Sigma M_B(\overline{F_i}) = 0.}$$

Контрольні запитання:

1. Що таке алгебраїчний момент сили відносно центру?
2. Що таке алгебраїчний момент пари сил, як він зображається?
3. Що таке плоска система довільно розташованих сил?

4. Яким чином спрощують плоску систему довільних сил?
5. Чому дорівнює головний вектор і головний момент плоскої системи довільних сил?
6. Які випадки приведення плоскої довільної системи сил до заданого центру?
7. Яка умова рівноваги довільної плоскої системи сил у векторній формі?
8. Які умова рівноваги довільної плоскої системи сил у проекційній формі?
9. Які умови рівноваги плоскої системи паралельних сил?

Література:

1. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. Учеб. для вузов. – М.: Высшая школа, 1995. – С. 35-37.

Лекція 7. Завдання руху точки

Мета: навчити задавати рух точки.

Знати: основні поняття кінематики, поняття траєкторії, шляху, переміщення точки, закону руху, способи завдання руху точки.

Вміти: задавати рух точки різними способами.

План:

1. Основні поняття кінематики.
2. Завдання руху точки у натуральній формі.
3. Завдання руху точки у векторній формі.
4. Завдання руху точки у координатній формі.

Зміст:

1. Кінематика – це розділ теоретичної механіки, де вивчається рух точок і тіл без урахування сил, що спричиняють цей рух.

Задача кінематики: 1) задати рух точки або тіла (визначити закон руху); 2) по заданому закону руху визначити кінематичні характеристики руху тіл та окремих точок.

До кінематичних характеристик відносяться швидкість та прискорення.

Задати рух точки – це значить навести рівняння, яке буде визначати положення точки у просторі у будь-яку мить часу. Таке рівняння має назву закон руху.

До основних понять кінематики відносяться: система відліку, рух, простір, час.

Система відліку – це система, яка включає до себе початок відліку, координатні вісі, тіло (точку), що вивчається.

Систем відліку існує безмежна кількість.

Рух (механічний рух) – це стан системи відліку, коли з плином часу змінюється положення тіла (точки) відносно координатних висей і початку відліку.

Час – це універсальна величина, яка протікає однаково для усіх систем відліку. В задачах час приймається незалежною величиною, а кінематичні характеристики, закон руху – залежними від часу.

Простір зображається трьохмірною прямокутною системою координат XOYZ.

2. Для того, щоб задати рух точки у натуральній формі необхідно наперед знати: 1) траєкторію руху точки; 2) початок відліку; 3) напрямок додатного відліку; 4) закон руху точки уздовж заданої траєкторії.

Траєкторія – це лінія, яку описує точка під час свого руху.

Для визначення положення руху у будь-яку мить часу необхідно знати відстань S точки від початку відліку O. Тому рівняння –це $\boxed{S = S(t)}$ закон руху точки у натуральній формі. При цьому необхідно звернути увагу, що відстань вимірюється по кривій – це криволінійна координата, де знак вказує, в який бік від початку відліку O необхідно відкладати цю відстань.

У випадку, коли відстань S не може бути виражена аналітичним співвідношенням S = S(t), використовують графічний метод завдання руху точки у натуральній формі. Для цього визначають (експериментально, графічно) відстані S_1, S_2, …, S_n точки M, які відповідають певним митям часу t_1, t_2, … t_n, і відкладають їх на графіку. Надалі з’єднують окремі точки і отримують графік руху – залежність відстані S від часу t.

3. Положення точки у просторі може бути визначено її радіус-вектором $\bar{r}$, який проведений із початку відліку О до точки, що вивчається.

Під час руху точки радіус-вектор змінюється за модулем і напрямком, тому для завдання руху точки необхідно у будь-яку мить часу знати радіус-вектор, тобто залежність:

$$\boxed{\bar{r} = \bar{r}(t)}$$

– <u>закон руху точки у векторній формі</u>.

Радіус-вектор під час руху точки описує траєкторію.

<u>Переміщення</u> – це вектор $\Delta\bar{r} = \bar{r}_1 - \bar{r}_0$, який проводиться з початкового положення точки в кінцеве.

<u>Шлях точки</u> – це сума абсолютних величин елементарних переміщень точки за даний проміжок часу.

Відмінність між шляхом і відстанню: шлях завжди додатній і з плином часу збільшується; відстань може бути додатною і від'ємною та з плином часу може зменшуватись і збільшуватись в залежності від напрямку руху точки.

Векторний спосіб завдання руху точки використовують для виведення теоретичних положень і залежностей, але не для практичних розрахунків.

4. При координатному способі завдання руху точки її вивчають у декартовій системі координат ХОУZ. Під час руху точки будуть змінюватися її координати, тому щоб визначити положення точки у просторі у будь-яку мить часу необхідно знати значення цих координат.

$$\boxed{\begin{array}{c} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{array}}$$

– <u>закон руху точки у координатній формі</u>.

Для руху т очки на площині ХОУ рух задається двома рівняннями:

$$\boxed{\begin{array}{c} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array}}$$

Розглянуті рівняння є рівняннями траєкторії в <u>параметричній формі</u>, де час – це незалежний змінний параметр. Щоб отримати траєкторію (рівняння траєкторії) в звичній для нас формі, необхідно виключити цей параметр із заданих рівнянь руху. В результаті отримаємо співвідношення між x, y, z для простору f(x; y; z)=0, для площини f(x; y)=0.

Поміж векторною і координатною формами завдання руху точки можна встановити взаємозв'язок, якщо врахувати, що положення точки М у просторі можна визначити через проекції радіус-вектора $\bar{r}$ на координатні вісі. В результаті отримаємо, що $r_x = x_м$; $r_y = y_м$; $r_z = z_м$.

Контрольні запитання:

1. Що таке кінематика?
2. Які задачі кінематики?
3. Що значить задати рух точки?
4. Що таке закон руху точки?
5. Що таке система відліку?
6. Що таке простір?
7. Що таке час?
8. Що таке рух?
9. Що необхідно знати для завдання руху точки у натуральній формі?
10. Що таке траєкторія руху точки?
11. Який закон руху точки у натуральній формі?
12. Як задається рух точки графічним методом?
13. Як задається рух точки векторним способом?
14. Який закон руху точки у векторній формі?
15. Що таке переміщення?
16. Що таке шлях?
17. Як задається рух точки координатним способом?
18. Який закон руху точки у координатній формі?

Література:

1. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. Учеб. для вузов. – М.: Высшая школа, 1995. – С. 45-48, 95-96.
2. Никитин Е.М. Курс теоретической механики. – М.: Наука, 1972. – С. 202-213.

Лекція 8. Швидкість точки

Мета: навчити визначати швидкість руху точки.

Знати: поняття середньої та миттєвої швидкостей руху точки, формули для їх визначення у різних формах завдання руху.

Вміти: визначати швидкість руху точки у різних формах завдання руху.

План:

1. Швидкість точки у векторній формі.
2. Швидкість точки у натуральній формі.
3. Швидкість точки у координатній формі.

Зміст:

1. Швидкість – це бистрота переміщення точки у просторі.

Нехай у мить часу t_0 положення точки задавалося радіус-вектором $\bar{r}_0$, а у мить часу t_1 – $\bar{r}_1$. Тоді за період часу $\Delta t = t_1 - t_0$ точка здійснила переміщення $\Delta\bar{r} = \bar{r}_1 - \bar{r}_0$. Таким чином, можна отримати вектор середньої швидкості точки як відношення переміщення до проміжку часу, за який це переміщення було здійснено: $\bar{V}_{ср} = \Delta\bar{r} / \Delta t$. Вектор середньої швидкості співпадає за напрямком із вектором переміщення $\Delta\bar{r}$, але відрізняється за модулем.

Однак, середня швидкість характеризує рух точки не точно, тобто не можна однозначно сказати, чому дорівнювала швидкість у конкретну мить часу на проміжку Δt. Для точної характеристики руху точки використовують миттєву швидкість – це швидкість у дану мить часу, яку отримують із середньої швидкості при $\Delta t \to 0$. В результаті отримаємо, що миттєва швидкість дорівнює першій похідній від радіус-вектора за часом:

$$\boxed{\bar{V} = d\bar{r}/dt}$$

Спрямований вектор миттєвої швидкості по дотичній до траєкторії руху точки у напрямку руху.

2. Розглянемо рух точки М, заданий у натуральній формі. Нехай у мить часу t_0 положення точки визначалося відстанню S_0, а у мить часу t_1 –S_1. Тоді за період часу $\Delta t = t_1 - t_0$ точка пройшла відстань $\Delta S = S_1 - S_0$. Таким чином, можна отримати середню швидкість точки як відношення пройденої відстані до проміжку часу, за який цю відстань було пройдено: $V_{ср} = \Delta S / \Delta t$.

Однак, середня швидкість характеризує рух точки не точно, тобто не можна однозначно сказати, чому дорівнювала швидкість у конкретну мить часу на проміжку Δt. Для точної характеристики руху точки використовують миттєву швидкість – це швидкість у дану мить часу, яку отримують із середньої швидкості при $\Delta t \to 0$. В результаті отримаємо, що миттєва швидкість дорівнює першій похідній від відстані за часом:

$$\boxed{V = dS/dt}$$

В даному випадку швидкість розглядається як алгебраїчна величина, тобто для її характеристики достатньо модуля і знака. Так, якщо швидкість додатна, то точка рухається у напрямку додатного відліку відносно початку відліку. Однак, при необхідності графічного зображення миттєвої швидкості її спрямовують по дотичній до траєкторії у напрямку руху точки.

3. Для отримання залежностей, що визначають швидкість точки у координатній формі використовують <u>теорему о проекції похідної від вектора</u>: проекція похідної від вектора на будь-яку нерухому вісь дорівнює похідній від проекції вектора, що диференціюється, на ту ж саму вісь.

Якщо врахувати, що для певної точки $r_x = x$; $r_y = y$; $r_z = z$, то отримаємо:

$$\boxed{\begin{aligned} V_x &= dx/dt \\ V_y &= dy/dt \\ V_z &= dz/dt \end{aligned}}$$

– <u>швидкість точки</u> уздовж даної вісі координат дорівнює першій похідній від відповідної координати за часом .

<u>Знак швидкості</u> показує напрямок руху відносно початку відліку О. Так, якщо швидкість додатна, то точка рухається у напрямку додатного відліку даної вісі координат. Наприклад, для вісі ОХ – це праворуч. Звичайно, проекції швидкості не мають напрямку, але для кращого розуміння схеми їх можна зображати стрілками.

Для визначення <u>модуля повної швидкості</u> точки використовують

$$\boxed{V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}}$$

теорему Піфагора:

Для визначення <u>напрямку вектора повної швидкості</u> використовують спрямовуючі косинуси:

$$\boxed{\begin{aligned} \cos\alpha &= V_x / V \\ \cos\beta &= V_y / V \\ \cos\gamma &= V_z / V \end{aligned}}$$

, де α – це кут між напрямками вектора повної швидкості та вісі координат ОХ; β – це кут між напрямками вектора повної швидкості та вісі координат ОУ; γ – це кут між напрямками вектора повної швидкості та вісі координат OZ.

Для даного випадку швидкість точки уздовж ОХ і ОУ буде від'ємною, а уздовж вісі OZ – додатною.

У випадку руху точки на площині відкидаються рівняння, пов’язані з віссю OZ.

Контрольні запитання:

1. Що таке швидкість?
2. Чому дорівнює миттєва швидкість у векторній формі?
3. Як спрямовується вектор швидкості у різних формах завдання руху?
4. Чому дорівнює миттєва швидкість у натуральній формі?
5. Що таке алгебраїчна швидкість?
6. Як формулюється теорема о проекції похідної від вектора?
7. Чому дорівнюють складові швидкості у координатній формі?
8. Як визначити за модулем і напрямком повну швидкість у координатній формі?
9. Що таке направляючі косинуси?

Література:

1. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. Учеб. для вузов. – М.: Высшая школа, 1995. – С. 99-100, 102, 107-108.

Лекція 9. Прискорення точки

Мета: навчити визначати присокрення руху точки.

Знати: поняття середнього та миттєвого прискорення руху точки, формули для їх визначення у різних формах завдання руху.

Вміти: визначати прискорення руху точки у різних формах завдання руху.

План:

1. Прискорення точки у векторній формі.
2. Прискорення точки у натуральній формі.
3. Прискорення точки у координатній формі.

Зміст:

1. Прискорення – це бистрота зміни швидкості руху точки.

Нехай у мить часу t_0 швидкість точки дорівнювала $\overline{V}_0$, а у мить часу t_1 – $\overline{V}_1$. Тоді за період часу $\Delta t = t_1 - t_0$ вектор швидкості точки змінився на величину $\Delta \overline{V} = \overline{V}_1 - \overline{V}_0$. Таким чином, можна отримати вектор середнього прискорення точки як відношення зміни вектора швидкості до проміжку часу, за який ця зміна відбулася: $\overline{a}_{ср} = \Delta \overline{V} / \Delta t$.

Для визначення напрямку вектора середнього прискорення від початкового положення точки M_0 відкладемо вектор $\overline{V}_1$ і побудуємо паралелограм, у якого одна із сторін буде $\overline{V}_0$, а діагоналлю – $\overline{V}_1$. Значить інша сторона паралелограма буде $\Delta \overline{V}$, яка обов’язково буде спрямована у бік увігнутості траєкторії. Таким чином, вектор середнього прискорення точки буде спрямований таким же чином, як і вектор $\Delta \overline{V}$, тобто у бік увігнутості траєкторії.

Однак, середнє прискорення характеризує рух точки не точно, тобто не можна однозначно сказати, чому дорівнювало прискорення у конкретну мить часу на проміжку Δt. Для точної характеристики руху точки використовують миттєве прискорення – це прискорення у дану мить часу, яке отримують із середнього прискорення при Δt→0. В результаті отримаємо, що миттєве прискорення дорівнює першій похідній від миттєвої швидкості або другій прохідній від радіус-вектора за часом:

$$\boxed{\overline{a} = d\overline{V}/dt = d^2\overline{r}/dt^2}$$

Спрямований вектор миттєвого прискорення у бік увігнутості траєкторії руху точки.

2. Якщо рух точки задано у натуральній формі, то прискорення точки розкладається по натуральних висях координат, куди входять дотична вісь і головна нормаль.

Дотична вісь τ – спрямована по дотичній до траєкторії руху точки у напрямку додатного відліку.

Головна нормаль n – спрямована перпендикулярно дотичній вісі у бік увігнутості траєкторії (лежить в дотичній до траєкторії площині).

Натуральні вісі координат рухаються разом із точкою по траєкторії, тобто це рухома система координат на відміну від декартової нерухомої XOYZ. Початок натуральних висей співпадає із точкою, рух якої вивчається.

В результаті розкладання прискорення по натуральних висях координат отримують відповідно дотичне і нормальне прискорення.

Дотичне прискорення – дорівнює першій похідній від миттєвої швидкості або другій похідній від відстані за часом.

$$\boxed{a_\tau = dV/dt = d^2S/dt^2}$$

Якщо врахувати, що V = $\sqrt{V_x^2 + V_y^2}$ для площини, то можна отримати наступну формулу:

$$\boxed{a_\tau = (V_x \cdot a_x + V_y \cdot a_y) / V}$$

Дотичне прискорення характеризується модулем і знаком. При необхідності зображення вектором дотичне прискорення спрямовується уздовж дотичної вісі τ. Якщо дотичне прискорення має додатній знак, то його напрямок співпадає із напрямком вісі τ.

Дотичне прискорення характеризує бистроту зміни вектора швидкості за модулем. Так, якщо дотичне прискорення і швидкість мають однаковий знак, то рух точки прискорений, а вектори дотичного прискорення і швидкості спрямовані в один бік.

Нормальне прискорення – дорівнює відношенню квадрату швидкості до радіусу ρ кривизни траєкторії руху точки у даному положенні.

$$\boxed{a_n = V^2/\rho}$$

Наприклад, під час руху точки по окружності радіус кривизни дорівнює радіусу цієї окружності.

Нормальне прискорення завжди спрямоване у бік увігнутості траєкторії, тобто співпадає з напрямком головної нормалі, тому завжди має додатній знак.

Нормальне прискорення характеризує бистроту зміни вектора швидкості за напрямком. Наприклад, чим менший радіус окружності, по якій рухається точка, тим більше буде нормальне прискорення. Для траєкторії у формі прямої лінії нормальне прискорення дорівнює нулю, адже ρ = ∞.

У випадку, зображеному на малюнку, для положення M_0 точка рухається прискорено; для положення M_1 – уповільнено.

Для визначення модуля повного прискорення використовують теорему Піфагора:

$$\boxed{a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}}$$

Вектор загального прискорення завжди спрямований у бік увігнутості траєкторії в даній точці. Щоб визначити відхилення вектора загального прискорення $\overline{a}$ від головної нормалі n, необхідно визначити кут μ між їх напрямками:

$$\boxed{\mathrm{tg}\mu = a_\tau / a_n}$$

3. Для отримання залежностей, що визначають прискорення точки у координатній формі використовують теорему о проекції похідної від вектора: проекція похідної від вектора на будь-яку нерухому вісь дорівнює похідній від проекції вектора, що диференціюється, на ту ж саму вісь.

$$a_x = dV_x/dt = d^2x/dt^2$$
$$a_y = dV_y/dt = d^2y/dt^2$$
$$a_z = dV_z/dt = d^2z/dt^2$$

– прискорення точки уздовж даної вісі координат дорівнює першій похідній від проекції відповідної швидкості або другій похідній від відповідної координати за часом.

Знак прискорення показує його напрямок відносно початку відліку О. Так, якщо прискорення додатне, то воно спрямоване у напрямку додатного відліку даної вісі координат. Наприклад, для вісі ОХ – це праворуч. Звичайно, проекції прискорення не мають напрямку, але для кращого розуміння схеми їх можна зображати стрілками.

Якщо знаки прискорення і швидкості уздовж даної вісі співпадають, то рух точки буде прискорений.

Для визначення модуля повного прискорення точки використовують теорему Піфагора:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Для визначення напрямку вектора повної швидкості використовують спрямовуючі косинуси:

$$\cos\alpha_1 = a_x / a$$
$$\cos\beta_1 = a_y / a$$
$$\cos\gamma_1 = a_z / a$$

, де α – це кут між напрямками вектора повного прискорення та вісі координат ОХ; β – це кут між напрямками вектора повного прискорення та вісі координат ОУ; γ – це кут між напрямками вектора повного прискорення та вісі координат OZ.

Для даного випадку прискорення точки уздовж OX і OУ буде від'ємним, а уздовж вісі OZ – додатнім.

У випадку руху точки на площині відкидаються рівняння, пов’язані з віссю OZ.

Контрольні запитання:

1. Що таке прискорення?
2. Чому дорівнює миттєве прискорення у векторній формі?
3. Що таке натуральні вісі координат?
4. Як спрямовується вектор повного прискорення у векторній і натуральній формах завдання руху?
5. Чому дорівнює нормальне прискорення?
6. Чому дорівнює дотичне прискорення?
7. Як спрямовуються натуральне і дотичне прискорення?
8. Як визначити за модулем і напрямком повне прискорення у натуральній формі?
9. Чому дорівнюють складові прискорення у координатній формі?
10. Як визначити за модулем і напрямком повне прискорення у координатній формі?
11. На що вказує знак прискорення?

Література:

1. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. Учеб. для вузов. – М.: Высшая школа, 1995. – С. 100-103, 108-110.

Лекція 10. Обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої вісі

Мета: навчити характеризувати обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої вісі.

Знати: визначення, закон, кінематичні характеристики тіла, що обертається навколо нерухомої вісі.

Вміти: визначати кутову швидкість і кутове прискорення тіла, лінійні швидкість і прискорення довільної точки тіла, що обертається навколо нерухомої вісі.

План:

1. Закон обертального руху твердого тіла навколо нерухомої вісі.
2. Кутова швидкість і кутове прискорення тіла.
3. Лінійна швидкість і лінійне прискорення довільної точки.

Зміст:

1. Обертання навколо нерухомої вісі – це рух твердого тіла, при якому його точки описують окружності з центрами на нерухомій прямій, перпендикулярній до їх площин.

Для завдання руху твердого тіла достатньо визначити рух трьох його точок, які не лежать на одній прямій. Візьмемо три точки, дві з яких залишаються нерухомими O і O_1, а точка K рухається разом з тілом навколо вісі обертання.

Вісь обертання – це пряма, якій належать усі нерухомі точки тіла.

Для вивчення руху введемо нерухому систему координат XOУZ і рухому X'OУ'Z', яка жорстко зв'язана з тілом і обертається разом з ним навколо нерухомої вісі. Координатні вісі проведемо так, щоб вісь обертання OO_1, OZ і OZ' співпадали, а вісь OX' спрямуємо на точку К. Під час руху тіла кут між висями OX і OX' постійно змінюється, його позначають φ – це кут обертання. Цей кут можна вважати кутовою координатою тіла, тому що він визначає положення тіла у просторі. Вимірюється кут обертання у радіанах.

Обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої вісі буде задано, якщо заданий як функція від часу кут обертання φ:

$$\boxed{\varphi = \varphi(t)}$$

– закон обертального руху тіла навколо нерухомої вісі.

Кут обертання φ вважається додатнім, коли вісь OX' обертається проти ходу часової стрілки, якщо дивитися з боку додатного напрямку вісі OZ.

2. Кут обороту φ характеризує обертання тіла тільки з геометричного боку. Щоб схарактеризувати рух тіла у часі застосовують кутову швидкість.

Якщо у мить часу t_0 положення тіла задавалося кутом φ_0, а у мить часу t_1 – кутом φ_1, то за період часу $\Delta t = t_1 - t_0$ кут обороту змінився на величину $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_0$. Тоді середня кутова швидкість – це відношення зміни кута обороту до проміжку часу, за який ця зміна відбулася:

$$\boxed{\omega_{ср} = \Delta\varphi/\Delta t}$$

Однак, середня кутова швидкість характеризує рух точки не точно, тобто не можна однозначно сказати, чому дорівнювала швидкість у конкретну мить часу на проміжку Δt. Для точної характеристики руху точки використовують миттєву кутову швидкість – це кутова швидкість у дану мить часу, яку отримують із середньої кутової швидкості при $\Delta t \to 0$. В результаті отримаємо, що миттєва кутова швидкість дорівнює першій похідній від кута обороту за часом:

$$\boxed{\omega = d\varphi/dt}$$

$$[\omega]=[c^{-1}]$$

Кутова швидкість – це величина, що характеризує бистроту зміни кута обороту у часі.

Кутова швидкість також характеризує напрямок обертання тіла: так, якщо кутова швидкість додатна, то обертання відбувається проти ходу часової стрілки.

Рівномірний обертальний рух в техніці характеризується частотою n обортів за хвилину. Але для інженерних розрахунків використовується кутова швидкість, тоді необхідно знати залежність між кутовою швидкістю та частотою обертів за хвилину:

$$\boxed{\omega = \pi n/30}$$

За однакову мить часу усі частини твердого тіла обертаються навколо вісі на однаковий кут. Значить у дану мить часу кутова швидкість є однаковою для усіх точок тіла.

В загальному випадку кутова швидкість є векторною величиною, спрямованою уздовж вісі обертання. Однак, у випадку обертання навколо нерухомої вісі, кутова швидкість є скаляром, так як характеризується модулем і знаком. Це пояснюється тим, що вісь, яка задає напрямок кутової швидкості, не змінює свого напрямку у просторі, а значить і кутова швидкість залишається за напрямком постійною. На схемах кутова швидкість позначається дуговою стрілкою, спрямованою у бік обертання навколо вісі.

Кутова швидкість може змінюватись з плином часу. Кутове прискорення – це величина, яка характеризує бистроту зміни кутової швидкості з плином часу.

Нехай величина кутової швидкості змінюється на величину $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_0$ за проміжок часу $\Delta t = t_1 - t_0$, тоді середнє кутове прискорення буде дорівнювати відношенню зміни кутової швидкості до проміжку часу, за який ця зміна відбулась: $\varepsilon_{ср} = \Delta\omega/\Delta t$.

Однак, середнє кутове прискорення характеризує рух точки не точно, тобто не можна однозначно сказати, чому дорівнювало кутове прискорення у

$$\boxed{\varepsilon = d\omega/dt = d^2\varphi/dt^2}$$

конкретну мить часу на проміжку Δt. Для точної характеристики руху точки використовують миттєве кутове прискорення – це прискорення у дану мить часу, яке отримують із середнього кутового прискорення при $\Delta t \to 0$. В результаті отримаємо, що миттєве кутове прискорення дорівнює першій похідній від миттєвої кутової швидкості або другій прохідній від кута обороту за часом:

$$[\varepsilon]=[c^{-2}]$$

В загальному випадку кутове прискорення є векторною величиною, спрямованою уздовж вісі обертання. Однак, у випадку обертання навколо нерухомої вісі, кутове прискорення є скаляром, так як характеризується модулем і знаком. Це пояснюється тим, що вісь, яка задає напрямок кутового прискорення, не змінює свого напрямку у просторі, а значить і кутове прискорення залишається за напрямком постійним. На схемах кутове прискорення позначається дуговою стрілкою. Напрямок і знак кутового прискорення співпадає з напрямком і знаком кутової швидкості при прискореному обертанні і протилежні – при уповільненому.

Кутове прискорення є однаковим для усіх точок тіла у дану мить часу.

Для рівномірного обертання кутова швидкість залишається постійною, кутове прискорення дорівнює нулю, а кут обороту пропорційний часу: $\omega=const$, $\varepsilon=d\omega/dt=0$, $\varphi=\varphi_0+\omega\cdot t$, де φ_0 – початкове значення кута.

Найбільш часто зустрічається рівнозмінне обертання – це обертання, при якому кутове прискорення залишається постійним: $\varepsilon=const$, $\omega=\omega_0+\varepsilon\cdot t$, $\varphi=\varphi_0+\omega_0\cdot t+\varepsilon\cdot t^2/2$.

3. На відміну від кутової швидкості лінійна швидкість кожної окремої точки тіла відрізняється при обертальному русі навколо нерухомої вісі. Лінійна швидкість довільної точки – це величина, що дорівнює добутку кутової швидкості тіла на відстань r (радіус) точки від вісі обертання:

$$\boxed{V = r\cdot\omega}$$

Лінійна швидкість спрямована перпендикулярно радіусу або по дотичній до окружності, яку описує точка під час обертання у бік обертання.

Якщо розглядається обертання точки, що лежить на поверхні циліндра (шків, вал), який обертається навколо своєї вісі, то лінійна швидкість такої точки називається окружною: $V_{окр}=\omega\cdot R$, де R – радіус тіла.

Лінійне прискорення довільної точки розкладають на складові у натуральній формі і отримують дотичне і нормальне прискорення точки.

Для визначення дотичного прискорення використаємо формулу із кінематики точки $a_\tau=dV/dt$ з урахуванням залежності $V = r\cdot\omega$, в результаті отримаємо: $a_\tau= d(r\cdot\omega)/dt = r\cdot(d\omega/dt) \rightarrow$

$\boxed{a_\tau = r\cdot\varepsilon}$ – дотичне прискорення точки дорівнює добутку радіусу окружності, по якій рухається точка, на кутове прискорення обертання тіла. Спрямовано дотичне прискорення по дотичній до окружності або перпендикулярно радіусу у бік, куди спрямоване кутове прискорення.

Для визначення нормального (доцентрового) прискорення використаємо формулу із кінематики точки $a_n=V^2/\rho$, де $\rho=r$, з урахуванням залежності $V = r\cdot\omega$, в результаті отримаємо: $a_n= \omega^2\cdot r^2/r \rightarrow$

$\boxed{a_n = \omega^2\cdot r}$ – нормальне (доцентрове) прискорення точки дорівнює добутку квадрату кутової швидкості тіла на відстань (радіус) точки від вісі обертання. Спрямоване нормальне прискорення до центру окружності (до вісі обертання), яку описує точка під час обертання тіла, тому нормальне прискорення ще називають доцентровим.

Модуль повного прискорення точки визначають за допомогою теореми Піфагора:

$$\boxed{a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = r\cdot\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}$$

Спрямоване повен прискорення у бік увігнутості окружності, по якій рухається точка, під кутом μ до її радіусу:

$$\boxed{tg\mu = \varepsilon/ \omega^2}$$

Контрольні запитання:

1. Що таке обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої вісі?
2. Що таке вісь обертання?
3. Який закон обертального руху твердого тіла навколо нерухомої вісі?
4. Чому дорівнює кутова швидкість обертального руху твердого тіла навколо нерухомої вісі?
5. Чому дорівнює кутове прискорення обертального руху твердого тіла навколо нерухомої вісі?
6. Яке правило знаків при визначенні кутових швидкості і прискорення?
7. Який зв'язок між кутовою швидкістю і кількістю обертів за хвилину?
8. Які бувають види обертального руху в залежності від прискорення?
9. Чому дорівнює дотичне прискорення довільної точки тіла при обертанні навколо нерухомої вісі?
10. Чому дорівнює нормальне прискорення довільної точки тіла при обертанні навколо нерухомої вісі?
11. Як визначити за модулем і напрямком повне прискорення довільної точки тіла при обертанні навколо нерухомої вісі?
12. Чому дорівнює лінійна (окружна) швидкість довільної точки тіла при обертанні навколо нерухомої вісі?
13. Як спрямовані лінійні швидкість і складові прискорення?

Література:

1. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. Учеб. для вузов. – М.: Высшая школа, 1995. – С. 119-123.

Лекція 11. Плоско-паралельний рух

Мета: навчити характеризувати плоско-паралельний рух твердого тіла.

Знати: визначення, закон, формули для визначення швидкості окремих точок тіла, що рухається плоско-паралельно; поняття миттєвого центру швидкостей.

Вміти: знаходити положення миттєвого центру швидкостей, визначати швидкості точок тіла, що рухається плоско-паралельно.

План:

1. Закон плоско-паралельного руху.
2. Розкладання плоско-паралельного руху на складові.
3. Швидкість довільної точки.
4. Миттєвий центр швидкостей (МЦС).

Зміст:

1. Плоско-паралельний (плоский) рух – це рух твердого тіла, при якому усі його точки переміщуються паралельно деякій нерухомій площині.

Розглянемо переріз S, що лежить у площині XOY, яка паралельна площині П. При плоско-паралельному русі усі точки тіла, що лежать на прямій MM_1 перпендикулярній перерізу S, рухаються однаково, тому для вивчення руху усього тіла достатньо вивчити, як рухається переріз S у площині XOY.

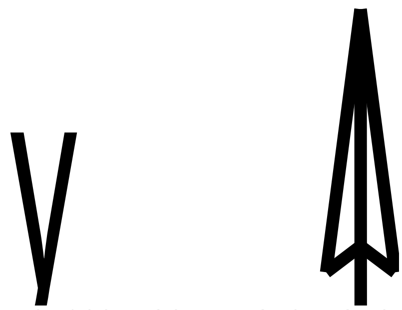
Положення перерізу S визначається положенням будь-якого проведеного у цьому перерізі відрізку AB, який задається координатами точки А і кутом φ, що відрізок АВ утворює з додатнім напрямком вісі ОХ. Точка А називається <u>полюсом</u> і обирається <u>довільно</u> у перерізу S.

Під час руху тіла величини x_A, y_A, φ будуть змінюватися, щоб знати закон руху тіла, тобто знати його положення у просторі у будь-яку мить часу, необхідно знати залежності:

$$\boxed{\begin{array}{c} x_A = x(t) \\ y_A = y(t) \\ \varphi = \varphi(t) \end{array}}$$

– <u>закон плоско-паралельного руху</u> твердого тіла.

2. Розглянемо рух перерізу S, який займає два послідовних положення S_1 і S_2.



Рух перерізу можна розкласти на <u>складові</u>: 1) <u>поступальний рух</u>, при якому усі точки переміщуються таким же чином, як полюс А; при цьому відрізок A_1B_1 займе положення A_2B_1'; 2) <u>обертальний рух</u> перерізу навколо нерухомої вісі, що проходить крізь полюс A_2 перпендикулярно перерізу S, при цьому усі точки обертаються навколо полюса A_2 на кут обороту Δφ, в результаті чого переріз S займає кінцеве положення S_2.

Значить, плоско-паралельний рух твердого тіла складається з поступального руху і обертального навколо полюсу. Послідовність цих складових значення не має.

Поступальна частина плоско-паралельного руху описується рівняннями $x_A = x(t)$; $y_A = y(t)$ при цьому <u>швидкості і прискорення</u> усіх точок дорівнюють швидкості і прискоренню полюсу.

Обертальна частина плоско-паралельного руху описується рівнянням φ= φ(t), при цьому рух перерізу S характеризується кутовою швидкістю ω і кутовим прискоренням ε, загальними для усіх точок. Також можна визначити лінійну швидкість і лінійне прискорення будь-якої точки перерізу.

3. Розглянемо довільну точку М перерізу S, яка рухається відносно рухомої $X^{/}AY^{/}$ і нерухомої ХОУ систем координат. Задамо рух точки М векторним способом: $\bar{r}_M = \bar{r}_A + \bar{r}^{/}$ (1), де $\bar{r}_M$ – радіус-вектор точки М відносно нерухомої системи координат ХОУ; $\bar{r}_A$ – радіус-вектор полюса А відносно висей ХОУ; $\bar{r}^{/} = \overline{AM}$ – вектор, який визначає положення точки М відносно висей $X^{/}AY^{/}$, які переміщуються разом з полюсом А поступально.

Для визначення швидкості точки М необхідно продиференціювати рівняння (1) за часом, в результаті отримаємо:

$\boxed{\bar{V}_M = \bar{V}_A + \bar{V}_{MA}}$ (2) – швидкість довільної точки дорівнює геометричній сумі швидкості полюсу А ($\bar{V}_A$) і лінійної швидкості точки М ($\bar{V}_{MA}$), яку вона отримує при обертанні навколо полюсу як нерухомого.

Модуль швидкості $\bar{V}_{MA}$ точки М при обертальному русі навколо полюсу А визначається за формулою обертального руху тіла навколо нерухомої вісі:

$$\boxed{V_{MA} = \omega \cdot MA}$$

При цьому спрямована швидкість $\bar{V}_{MA}$ перпендикулярно до відрізку МА (радіус обертання) у бік обертання перерізу S навколо полюсу А.

4. Миттєвий центр швидкостей (МЦШ) – це точка перерізу тіла, швидкість якої у дану мить дорівнює нулю.

Якщо тіло рухається не поступально, то в кожну мить часу існує тільки одна точка перерізу, швидкість якої дорівнює нулю, тобто МЦШ.

Для визначення положення МЦШ необхідно знати тільки напрямок швидкостей $\overline{V}_A$ і $\overline{V}_B$ довільних двох точок А і В перерізу тіла (або траєкторію руху цих точок). Тоді МЦШ буде знаходитися на перетині перпендикулярів, проведених з точок А і В до швидкостей цих точок (або до дотичних до їх траєкторій).

Якщо точку Р (МЦС) прийняти за полюс, то швидкість точки А відповідно до формули (2) буде дорівнювати: $\overline{V}_A = \overline{V}_P + \overline{V}_{AP}$, але за визначенням $\overline{V}_P=0$, значить $\overline{V}_A = \overline{V}_{AP}$. Аналогічний результат можна отримати для будь-якої точки перерізу. Значить, швидкість будь-якої точки тіла, що лежить у перерізі S, дорівнює її обертальній швидкості навколо МЦШ:

$V_A = \omega \cdot PA$ ($\overline{V}_A \perp PA$); $V_B = \omega \cdot PB$ ($\overline{V}_B \perp PB$), якщо виразити із цих рівнянь кутову швидкість ω і прирівняти отримані відношення, то будемо мати:

$$\boxed{V_A/PA = V_B/PB = V_M/PM} \quad (3)$$

Для визначення швидкості будь-якої точки М тіла необхідно знати модуль і напрямок швидкості якої-небудь точки А тіла і напрямок швидкості іншої його точки В. Тоді на перетині перпендикулярів до цих швидкостей знаходять МЦШ, за напрямком швидкостей точок А або В визначають напрямок обертання ω тіла і після цього можна визначити швидкість будь якої точки М тіла за допомогою пропорції (3). При цьому враховують, що швидкість $\bar{v}_M \perp PM$ і спрямована у бік, куди вказує кутова швидкість ω.

Контрольні запитання:

1. Що таке плоско-паралельний рух твердого тіла?
2. Який закон плоско-паралельного руху твердого тіла?
3. Які складові плоско-паралельного руху?
4. Чому дорівнює лінійна швидкість довільної точки тіла, що рухається плоско-паралельно?
5. Що таке миттєвий центр швидкостей?
6. Як визначити положення миттєвого центру швидкостей?
7. Як за допомогою МЦС визначити швидкість довільної точки за модулем і напрямком?

Література:

1. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. Учеб. для вузов. – М.: Высшая школа, 1995. – С. 127-145.
2. Никитин Е.М. Курс теоретической механики. – М.: Наука, 1972. – С. 298-326.

Лекція 12. Динаміка точки

Мета: навчити використовувати диференціальні рівняння для характеристики динаміки руху точки.

Знати: закони і задачі динаміки, диференціальні рівняння руху точки в натуральній і координатній формах, основні види сил.

Вміти: використовувати закони динаміки для розв'язання задач, складати диференціальні рівняння руху точки в натуральній і координатній формах.

План:

1. Закони і задачі динаміки.
2. Диференціальні рівняння руху матеріальної точки.
3. Основні види сил.

Зміст:

1. <u>Динаміка</u> – це розділ механіки, в якому вивчають рух матеріальних тіл під дією сил.

<u>Задачі динаміки</u>: 1) Знаючи закон руху точки, визначити силу, що спричиняє цей рух; 2) Основна задача динаміки: по заданих силах, що діють на точку, визначити закон руху точки.

<u>Основні закони динаміки</u>

<u>Закон інерції:</u> матеріальна точка зберігає стан покою або прямолінійного рівномірного руху доти, доки зовнішні сили не примусять її змінити цей стан.

<u>Рух за інерцією</u> – це рух, що здійснюється точкою за відсутності діючих сил.

<u>Основний закон динаміки</u> – добуток маси матеріальної точки на прискорення, яке вона отримує під дією даної сили, дорівнює за модулем цій силі і напрямки прискорення та сили співпадають.

$$\boxed{\overline{F} = m \cdot \overline{a}}$$

З цього закону випливає, що маса є мірою інертності руху точки. Так, під дією даної сили точка, маса якої більше (більш інертна), отримає менше прискорення.

Якщо на точку діє одночасно декілька сил, то вони по закону паралелограма сил будуть еквівалентні одній силі (рівнодіюча), яка дорівнює геометричній сумі даних сил ($\overline{R} = \Sigma \overline{F_i}$). В даному випадку основний закон динаміки прийме вигляд:

$$\boxed{\Sigma \overline{F_i} = m \cdot \overline{a}} \quad (1)$$

Закон рівності дії та протидії – дві матеріальні точки діють одна на одну з силами, що рівні між собою за модулем і спрямовані уздовж однієї прямої у протилежні сторони.

$$\boxed{\overline{F} = -\overline{F}}$$

Цей закон широко застосовують при визначені нормальної реакції поверхні.

$$N = mg \cdot \cos\alpha.$$

2. Для розв'язання задач динаміки використовують одну з двох систем рівнянь: у координатній або натуральній формі.

Рівняння у декартових координатах. Із кінематики відомо, що рух точки в прямокутних декартових координатах задається рівняннями:

$$x = x\,(t);\ y = y\,(t);\ z = z(t).$$

Для розв'язання задач динаміки необхідно мати рівняння, що зв'язують координати точки і діючу на неї силу. Такі рівняння дає основний закон динаміки (1): $\Sigma \overline{F_i} = m \cdot \overline{a}$.

Спроектуємо це векторне рівняння на вісі координат. При цьому врахуємо, що $a_x = d^2x/dt^2$; $a_y = d^2y/dt^2$; $a_z = d^2z/dt^2$. В результаті отримаємо:

$$\boxed{\begin{aligned} \Sigma F_{ix} &= m \cdot d^2x/dt^2 \\ \Sigma F_{iy} &= m \cdot d^2y/dt^2 \\ \Sigma F_{iz} &= m \cdot d^2z/dt^2 \end{aligned}} \quad (2)$$

– диференціальні рівняння руху точки у прямокутних декартових координатах.

Рівняння у натуральних координатах. Для отримання цих рівнянь спроектуємо обидві частини рівняння (1) на натуральні вісі координат, враховуючи, що дотичне прискорення a_τ = dV/dt = d^2S/dt^2; нормальне прискорення $a_n = V^2/\rho$; швидкість руху V = dS/dt; закон руху у натуральній формі S=S(t). В результаті отримаємо:

$$\boxed{\begin{array}{l} \Sigma F_{i\tau} = m\cdot(d^2S/dt^2) \\ \Sigma F_{in} = m\cdot V^2/\rho \end{array}} \quad (3)$$

– диференціальні рівняння руху точки у натуральній формі.

3. При розв’язанні задач динаміки здебільшого розглядають наступні постійні або змінні сили.

Сила тяжіння – це постійна сила $\overline{P}$, що діє на будь-яке тіло поблизу поверхні Землі і спрямована до її центру. Модуль сили тяжіння дорівнює вазі тіла P=m·g.

Сила тертя – це сила, яка виникає у місці контакту тіл при їх ковзанні по поверхні одне одного за відсутності рідкого мастила. Модуль сили тертя дорівнює добутку коефіцієнта тертя f на нормальну реакцію поверхні N: F=f·N.

Сила тяжіння – це сила, з якою два матеріальних тіла притягаються одне до одного за законом всесвітнього тяжіння: $F=f\cdot m_1\cdot m_2/r^2$, де f – гравітаційна постійна $f=6{,}673\cdot10^{-11}$ $м^3/кг\cdot с^2$; m_1, m_2 – маси тіл; r – відстань між тілами.

Звідси масу тіла можна визначати як інерційну характеристику із основного закону динаміки, а можна як гравітаційну характеристику. Досвід показує що ці величини співпадають з точністю до 10^{-12}, тому вважаються однією і тією ж величиною.

Сила пружності – це сила, що залежить від відстані і за законом Гука пропорційна деформації. Для пружини сила пружності дорівнює: $F=c\cdot\lambda$, де λ – подовження або стиск пружини; c – коефіцієнт жорсткості пружини.

Сила в'язкого тертя – це сила, що залежить від швидкості руху і діє на тіло при його повільному русі у в'язкому середовищі (або при наявності рідкого мастила): $R = \mu \cdot V$, де μ – коефіцієнт опору; V – швидкість руху тіла.

Сила аеродинамічного (гідравлічного) опору – це сили, що залежить від швидкості і діє на тіло під час руху у повітрі або воді: $R = 0{,}5 \cdot c_x \cdot \rho \cdot S \cdot V^2$, де ρ – щільність середовища; S – площа проекції тіла на площину, що перпендикулярна напрямку руху; c_x – коефіцієнт опору, що визначається експериментально і залежить від форми тіла і орієнтації руху.

Як видно сила може залежати від часу, координати або швидкості. Коли сила залежить від часу використовують диференціальні рівняння у формі (2) або (3). Коли сила залежить від відстані (координати), то використовують заміну $d^2x/dt^2 = dV_x/dt = (dV_x/dx)\cdot(dx/dt) = (dV_x/dx)\cdot V_x$ у координатній формі або $d^2S/dt^2 = (dV/dS)\cdot(dS/dt) = (dV/dS)\cdot V$ у натуральній формі. Якщо сила залежить від швидкості, то використовують заміну $d^2x/dt^2 = dV_x/dt$ у координатній формі або $d^2S/dt^2 = dV/dt$ у натуральній формі.

Контрольні запитання:

1. Що таке динаміка?
2. Які задачі динаміки?
3. Як формулюється і записується основний закон динаміки?
4. Як формулюється закон інерції?
5. Що таке рух за інерцією?
6. Як формулюється закон рівності дії та протидії?
7. Як записуються диференціальні рівняння руху точки у координатній формі?
8. Як записуються диференціальні рівняння руху точки у натуральній формі?
9. Що таке сила тяжіння?
10. Що таке сила тертя?
11. Що таке сила пружності?

12. Що таке сила в'язкого тертя?
13. Що таке сила аеродинамічного (гідравлічного) опору?
14. Від яких параметрів в задачах можуть залежати сили?

Література:

1. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. Учеб. для вузов. – М.: Высшая школа, 1995. – С. 186-197.
2. Никитин Е.М. Курс теоретической механики. – М.: Наука, 1972. – С. 333-352.

Лекція 13. Сили інерції

Мета: навчити розуміти природу сил інерції і шляхи їх використання у розв'язанні задач динаміки.

Знати: поняття про сили інерції, формули для визначення сили інерції та її складових, принцип Даламбера.

Вміти: визначати силу інерції та її складові, складати рівняння з використанням принципу Даламбера.

План:

1. Поняття про сили інерції.
2. Складові сили інерції.
3. Принцип Даламбера для матеріальної точки.

Зміст:

1. Якщо в задачі динаміки або статики необхідно визначити рух або умови рівноваги тіла, то складають відповідно рівняння руху або рівноваги для цього тіла. Проте в ці рівняння входять тільки ті сили, які реально діють на тіло. Сюди не входять сили, з якими тіло діє на оточуючі матеріальні тіла. Однак, в механіці є метод, коли враховують сили протидії тіла, що вивчається, по відношенню до діючих на нього тіл.

Нехай деяка матеріальна точка М відчуває вплив з боку інших об'єктів M_1, M_2, M_3 з силами $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F_3}$. Ці сили повідомляють матеріальній точці М прискорення $\overline{a}$.

Матеріальна точка М у свою чергу протидіє тілам M_1, M_2, M_3 з силами протидії $\overline{F}'_1, \overline{F}'_2, \overline{F'_3}$, які протилежно спрямовані відносно сил $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F_3}$, але не урівноважуються ними, так як сили ці прикладені не к точці М, а до тіл M_1, M_2, M_3.

Прикладемо <u>умовно</u> ці сили протидії не к тілам M_1, M_2, M_3, а к точці М і складемо їх геометрично.

<u>Сила інерції</u> – це геометрична сума сил протидії точки по відношенню до зовнішніх тіл, які повідомляють їй прискорення.

Прискорення $\overline{a}$, яке отримує точка М під дією сил $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F_3}$, спрямовано таким же чином як і рівнодійна усіх цих сил і пропорційна їй. Сила інерції дорівнює за модулем, але протилежна за напрямком відносно цих сил, тому визначається за формулою:

$$\boxed{\overline{\Phi} = -m \cdot \overline{a}}$$

– <u>сила інерції</u> матеріальної точки дорівнює добутку маси точки на її прискорення і спрямована протилежно цьому прискоренню.

Необхідно <u>чітко знати</u>, що сила інерції не діє на дослідне тіло, а діє на тіла, які є в’язями для нього.

2. Сили інерції часто приходиться проектувати на дотичну вісь і головну нормаль – розкладання сил інерції на складові у натуральній формі.

Дотична сила інерції – це складова сили інерції, спрямована по дотичній до траєкторії руху точки, модуль якої дорівнює добутку маси цієї точки на її дотичне прискорення і яка спрямована протилежно цьому прискоренню.

$$\boxed{\overline{\Phi_\tau} = -m \cdot \overline{a_\tau}}$$

Модуль дотичної сили інерції:

$$\boxed{\Phi_\tau = m \cdot (\mathrm{dV/dt}) = \mathrm{m} \cdot (\mathrm{d^2S/dt^2})}$$

Дотична сила інерції спрямована за швидкістю руху при уповільненому русі і протилежно швидкості – при прискореному русі.

Нормальна сила інерції – це складова сили інерції, що спрямована по головній нормалі до траєкторії руху точки у бік випуклості траєкторії і рівна за модулем добутку нормального прискорення на масу точки.

$$\boxed{\overline{\Phi_n} = -m \cdot \overline{a_n}}$$

Модуль нормальної сили інерції:

$$\boxed{\Phi_n = m \cdot V^2/\rho} \quad (1)$$

Відцентрова сила – це нормальна сила інерції при русі точки по окружності, яка спрямована по радіусу окружності від її центру.

Модуль відцентрової сили можна отримати із формули (1), якщо врахувати, що V=ω·r, де ω – кутова швидкість руху точки; r – радіус окружності. В результаті отримаємо:

$$\boxed{\Phi_ц = m \cdot \omega^2 \cdot \mathrm{r}}$$

Якщо рух точки по окружності рівномірний, то існує тільки відцентрова сила інерції.

3. Відповідно основному рівнянню статики точка знаходиться у стані рівноваги, якщо сума усіх діючих н точку активних і реактивних сил дорівнює нулю: $\Sigma \overline{F}$ =0 (2).

Основне рівняння динаміки: $\Sigma \overline{F} = \mathrm{m} \cdot \overline{a}$ (3).

Нехай деяка точка М масою m під дією усіх прикладених до неї активних сил і реакцій в'язей отримала прискорення $\overline{a}$. Будемо вважати, що до точки М прикладена також і сила інерції $\overline{\Phi} = -\,\mathrm{m} \cdot \overline{a}$ (4).

Складемо рівняння (3) і (4): $\Sigma \overline{F} + \overline{\Phi} = \mathrm{m} \cdot \overline{a} - \mathrm{m} \cdot \overline{a}$, →

$$\boxed{\Sigma \overline{F} + \overline{\Phi} = 0} \quad (5)$$

– в результаті рівняння динаміки (3) переходить в рівняння статики (2). Значить, якщо до усіх діючих на точку активних сил і сил реакцій в'язей додати ще й силу інерції, то задачу динаміки можна вирішувати методами статики.

Рівняння (5) символізує принцип Даламбера в векторній формі: якщо до усіх діючих на точку сил додати силу інерції, то систему діючих на точку сил можна вважати на дану мить часу урівноваженою і застосовувати до неї закони статики.

Якщо спроектувати рівняння (5) на координатні вісі, то отримаємо принцип Даламбера в проекційній формі:

$$\boxed{\begin{array}{l}\Sigma F_{ix} + \Phi_{ix} = 0 \\ \Sigma F_{iy} + \Phi_{iy} = 0 \\ \Sigma F_{iz} + \Phi_{iz} = 0\end{array}}$$

, де $\Sigma\Phi_{ix} = -m\cdot(d^2x/dt^2)$; $\Sigma\Phi_{iy} = -m\cdot(d^2y/dt^2)$; $\Sigma\Phi_{iz} = -m\cdot(d^2z/dt^2)$ – суми проекцій сил інерції на вісі координат.

Контрольні запитання:

1. Що таке сила інерції?
2. Як визначити за модулем і напрямком повну силу інерції?
3. Які складові сили інерції?
4. Як визначити за модулем і напрямком дотичну силу інерції?
5. Як визначити за модулем і напрямком нормальну силу інерції?
6. Як визначити за модулем і напрямком відцентрову силу інерції?
7. Як формулюється принцип Даламбера?
8. Як записуються принцип Даламбера у векторній і проекційній формахі?
9. У чому полягає суть принципу Даламбера?

Література:

1. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. Учеб. для вузов. – М.: Высшая школа, 1995. – С. 344-346.
2. Никитин Е.М. Курс теоретической механики. – М.: Наука, 1972. – С. 346-350.

Лекція 14. Осьовий момент інерції

Мета: навчити розуміти роль осьового моменту інерції в обертальному русі твердого тіла.

Знати: вплив осьового моменту інерції на характеристики руху системи матеріальних точок або твердого тіла, поняття радіусу інерції, теорему Гюйгенса-Штейнера, формули для визначення осьового моменту інерції окремих тіл, основний закон динаміки і диференціальні рівняння обертального руху твердого тіла навколо нерухомої вісі.

Вміти: визначати осьовий момент інерції для системи матеріальних точок, для окремих геометричних тіл, відносно паралельних висей; складати диференціальні рівняння обертального руху твердого тіла навколо нерухомої вісі.

План:

1. Поняття про осьовий момент інерції та формули його визначення для окремих тіл.
2. Теорема Гюйгенса-Штейнера.
3. Основний закон динаміки для обертального руху твердого тіла навколо нерухомої вісі, диференціальні рівняння обертального руху.

Зміст:

1. <u>Осьовий момент інерції</u> системи матеріальних точок або тіла – це скалярна величина, яка дорівнює сумі добутків мас усіх точок системи або тіла на квадрати їх відстаней від даної вісі.

$$\boxed{I_z = \Sigma m \cdot h_i^2}$$

$$I_z = m_1 \cdot h_i^2 + m_2 \cdot h_2^2 + m_3 \cdot h_3^2$$

Осьовий момент інерції завжди додатна величина і не дорівнює нулю.

Якщо положення точок відносно вісі задано координатами, то осьовий момент інерції можна визначити за допомогою формул:

$$I_x = \Sigma m_i \cdot (y_i^2 + z_i^2)$$
$$I_y = \Sigma m_i \cdot (x_i^2 + z_i^2)$$
$$I_z = \Sigma m_i \cdot (y_i^2 + x_i^2)$$

Радіус інерції – це відстань від вісі обертання тієї точки, в якій необхідно зосередити масу усього тіла, щоб осьовий момент інерції однієї цієї точки дорівнював осьовому моменту інерції усього тіла.

$$I_z = M \cdot \rho_z^2$$

, де ρ_z – радіус інерції; M – маса усього тіла або системи матеріальних точок.

Момент інерції залежить від маси і розподілення цієї маси (h) відносно вісі обертання, тобто від форми тіла. Тому різні за формою тіла мають різні формули для визначення осьового моменту інерції:

1) Тонкий однорідний стержень, вісь обертання для якого проходить перпендикулярно крізь його край:

$$I_z = M \cdot l^2/3$$

, де l – довжина стержня; M – маса стержня.

2) Тонкий однорідний стержень, вісь обертання для якого проходить крізь центр мас:

$$I_z = M \cdot l^2/12$$

, де l – довжина стержня; M – маса стержня; с – центр мас.

3) Для крапкового тіла масою m на відстані r від вісі обертання:

$$I_z = m \cdot r^2$$

4) Для диску або циліндру радіусом R із рівномірно розподіленою масою m по перерізу, вісь обертання для якого проходить крізь центр мас (точка С):

$$\boxed{I_z = m\cdot R^2/2}$$

5) Для кільця радіусом R з масою m, зосередженою на ободі (маховик), вісь обертання для якого проходить крізь центр мас (точка С):

$$\boxed{I_z = m\cdot R^2}$$

2. Осьовий момент інерції даного тіла відносно різних висей буде також різним.

Проведемо через центр мас С тіла довільні вісі $X^/CУ^/Z^/$, а через будь-яку точку О на вісі $CX^/$ - вісі ХОУZ, паралельні першим. Відстань між висями $CZ^/$ і OZ позначимо d і складемо вирази для визначення осьових моментів інерції відносно цих висей.

$$I_{oz} = \Sigma m_i\cdot(y_i^2 + x_i^2)$$

$$I_{cz}^/ = \Sigma m_i\cdot(y\,{}^/_i{}^2 + x\,{}^/_i{}^2)$$

За малюнком $x_i = x^{/}_i – d$, → $x_i^2 = x^{/2}_i + d^2 – 2\cdot x^{/}_i\cdot d$, $y_i = y^{/}_i$. Підставимо значення x_i, y_i у вираз для визначення I_{oz}:

$I_{oz} = \Sigma m_i\cdot(y^{/2}_i + x^{/2}_i + d^2 – 2\cdot x^{/}_i\cdot d) = \Sigma m_i\cdot(y^{/2}_i + x^{/2}_i) + \Sigma m_i\cdot d^2 – (\Sigma m_i\cdot x^{/}_i)\cdot 2d$

В отриманому виразі $\Sigma m_i\cdot(y^{/2}_i + x^{/2}_i)= I_{cz}^{/}$; $\Sigma m_i\cdot d^2=M\cdot d^2$; $\Sigma m_i\cdot x^{/}_i = M\cdot x_c^{/}$ (по теорії центра ваги або центра паралельних сил). Але в нашому випадку точка С є початком координат, значить $x_c^{/}=0$ → $(\Sigma m_i\cdot x^{/}_i)\cdot 2d = 0$. В результаті отримаємо:

$\boxed{I_{oz} = I_{cz}^{/} + M\cdot d^2}$ – <u>теорема Гюйгенса-Штейнера</u>: осьовий момент інерції тіла відносно даної вісі дорівнює осьовому моменту інерції відносно вісі, що їй паралельна і проходить через центр мас тіла, плюс добуток маси усього тіла на квадрат відстані між висями.

Із теореми Гюйгенса-Штейнера видно, що $I_{oz} > I_{cz}^{/}$, тобто із усіх висей даного напрямку <u>найменший осьовий момент інерції</u> буде відносно тієї вісі, що проходить через центр мас тіла.

3. <u>Основний закон динаміки</u> для обертального руху твердого тіла навколо нерухомої вісі: обертальний момент, що викликає обертання тіла, дорівнює за модулем добутку осьового моменту інерції тіла на кутове прискорення і співпадає за напрямком з цим прискоренням.

$$\boxed{M_z = I_z\cdot\varepsilon}$$

Із закону видно, що <u>осьовий момент інерції є мірою інертності</u> тіла в <u>обертальному русі</u> (як маса у поступальному). Так, під дією однокового Обертального моменту те із тіл отримає більше кутове прискорення, у якого менше осьовий момент інерції.

На основі основного закону динаміки можна отримати диференціальні рівняння обертального руху тіла навколо нерухомої вісі, якщо врахувати: $\varepsilon=d\omega/dt=d^2\varphi/dt^2$, де $\varphi=\varphi(t)$ – закон обертального руху. В результаті отримаємо:

$$\boxed{M_z = I_z\cdot d\omega/dt=d^2\varphi/dt^2}$$

Використовуючи диференціальні рівняння, можна розв’язати основні задачі динаміки обертального руху тіла: 1) Знаючи закон обертання $\varphi=\varphi(t)$ тіла, можна знайти обертальний момент M_z; 2) Знаючи обертальний момент M_z, можна знайти закон обертального руху $\varphi=\varphi(t)$ або знайти його кутову швидкість ω.

В загальному випадку M_z може залежати від часу t, кута обороту φ або кутової швидкості ω.

Диференціальні рівняння застосовують при вивченні руху одного тіла.

Контрольні запитання:

1. Що таке осьовий момент інерції?
2. Як визначити осьовий момент інерції системи матеріальних точок?
3. Що таке радіус інерції?
4. Як визначити осьовий момент інерції окремих геометричних тіл?
5. Як формулюється і записується теорема Гюйгенса-Штейнера?
6. Який висновок із теореми Гюйгенса-Штейнера?
7. Як формулюється і записується основний закон динаміки для обертального руху тіла навколо нерухомої вісі?
8. Як записуються диференціальні рівняння обертального руху тіла навколо нерухомої вісі?
9. Як трансформуються задачі динаміки для обертального руху тіла навколо нерухомої вісі?

Література:

1. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. Учеб. для вузов. – М.: Высшая школа, 1995. – С. 265-271.
2. Никитин Е.М. Курс теоретической механики. – М.: Наука, 1972. – С. 412-417.

Лекція 15. Основні міри механічного руху матеріальної системи

Мета: навчити розуміти роль механічних мір при характеристиці руху матеріальної системи.

Знати: роль кількості руху, моменту кількості руху, кінетичної енергії при характеристиці руху матеріальної системи.

Вміти: визначати основні міри механічного руху матеріальної точки і системи.

План:

1. Кількість руху матеріальної системи.
2. Кінетичний момент.
3. Кінетична енергія.

Зміст:

1. Кількість руху точки – це векторна величина, що дорівнює за модулем добутку маси точки на швидкість її руху і співпадає за напрямком з цією швидкістю.

Кількість руху системи – це векторна величина, що дорівнює геометричній сумі (головному вектору) кількостей руху усіх точок системи.

$$\boxed{\overline{Q} = \Sigma m_i \cdot \overline{V}_i} \quad (1)$$

[кг·м / с]

Модуль кількості руху системи можна визначити через проекції на вісі координат:

$$\boxed{\begin{aligned} Q_x &= \Sigma m_i \cdot V_{ix} \\ Q_y &= \Sigma m_i \cdot V_{iy} \\ Q_z &= \Sigma m_i \cdot V_{iz} \end{aligned}} \quad (2)$$

$$Q = \sqrt{Q_x^2 + Q_y^2 + Q_z^2}$$

На основі теорії знаходження центра мас можна записати вираз:

$\Sigma m_i \cdot \overline{r}_i = M \cdot \overline{R}_c \rightarrow \Sigma m_i \cdot d\overline{r}_i/dt = M \cdot d\overline{R}_c/dt \rightarrow \Sigma m_i \cdot \overline{V}_i = M \cdot \overline{V}_c$, де M – маса усієї системи або тіла; $\overline{V}_c$ – швидкість центра мас системи або тіла. В результаті формули (1) і (2) приймуть вигляд:

$$\boxed{\overline{Q} = M \cdot \overline{V}_c} \quad (3)$$

– кількість руху системи дорівнює за модулем добутку маси системи на швидкість руху її центра мас і співпадає за напрямком з цією швидкістю.

В проекційній формі отримаємо: проекція кількості руху системи на координатну вісь дорівнює добутку маси системи на проекцію швидкості її центра мас на ту ж саму вісь.

$$\boxed{\begin{array}{c} Q_x = M \cdot V_{cx} \\ Q_y = M \cdot V_{cy} \\ Q_z = M \cdot V_{cz} \end{array}}$$

Із формули (3) видно, що при русі тіла, якщо центр мас залишається нерухомим, то кількість руху дорівнює нулю. Прикладом такого руху є обертання тіла навколо нерухомої вісі, що проходить через центр мас.

Таким чином, кількість руху є характеристикою поступального руху тіла або системи. Якщо тіло рухається складно, то кількість руху залежить тільки від поступальної частини руху.

2. Момент кількості руху точки відносно даного центру – це векторна величина $\overline{M_o}(m\overline{V})$, яка дорівнює векторному добутку кількості руху точки на її радіус-вектор $\overline{r}$ і напрямок визначається правилом буравчика (аналогічно моменту сили відносно центру): $\overline{M_o}(m\overline{V}) = \overline{r_A} \times m\overline{V}$

Модуль моменту кількості руху дорівнює добутку модуля кількості руху точки на її плече відносно даного центру O:

$$\boxed{M_O(m\overline{V}) = m \cdot V \cdot h}$$

Кінетичний момент відносно даного центра – це векторна величина $\overline{K_O}$, що дорівнює геометричній сумі моментів кількості руху усіх точок системи або тіла відносно цього центру.

$$\boxed{\overline{K}_O = \sum \overline{M_o}(m_i \overline{V_i})}$$

Модуль кінетичного моменту можна визначити через проекції на координатні вісі:

$$\boxed{\begin{aligned} K_x &= M_x(m_i \overline{V_i}) \\ K_y &= M_y(m_i \overline{V_i}) \\ K_z &= M_z(m_i \overline{V_i}) \end{aligned}}$$

$$K_O = \sqrt{K_x^2 + K_y^2 + K_z^2}$$

$$[K] = [кг \cdot м^2 / с]$$

Розглянемо довільну точку A тіла, що обертається навколо нерухомої вісі.

Визначимо момент кількості руху точки A відносно центра окружності O. У даному випадку радіус r окружності, по якій рухається точка A є плечем кількості руху $m\overline{V}$. При цьому врахуємо, що $V = \omega \cdot r$, значить можна записати: $M_O(m\overline{V}) = m \cdot V \cdot r = m \cdot r^2 \cdot \omega = I_z \cdot \omega$. Це буде справедливо для будь-якої точки тіла. Таким чином, отримаємо:

$$\boxed{K_z = I_z \cdot \omega}$$

– кінетичний момент тіла, що обертається навколо нерухомої вісі, дорівнює добутку осьового моменту інерції тіла відносно цієї вісі на кутову швидкість руху тіла.

Отже, кінетичний момент є характеристикою обертального руху тіла. Так, якщо тіло рухається поступально, то кутова швидкість, а значить і кінетичний момент тіла дорівнюють нулю. При складному русі тіла кінетичний момент описує обертальну складову руху.

3. Кінетична енергія системи – це скалярна величина T, яка дорівнює сумі кінетичних енергій усіх точок системи.

$$\boxed{T = \Sigma m_i \cdot V_i^2/2} \quad (4)$$

$$[T] = [\text{Дж}]$$

Кінетична енергія характеризує і поступальний і обертальний рухи системи або тіла, не залежить від напрямку руху і завжди додатна.

Для поступального руху тіла усі точки рухаються як центр мас C, тому мають однакові швидкості $V_i = V_c$. Якщо при цьому врахувати, що $\Sigma m_i = M$, де M – маса усього тіла або системи, то формула (4) прийме вигляд:

$$\boxed{T_{пост} = M \cdot V_c^2/2}$$

При обертальному русі тіла навколо нерухомої вісі швидкість кожної точки дорівнює $V_i = \omega \cdot h_i$, де ω – кутова швидкість руху тіла; h_i – відстань точки від вісі обертання. В результаті отримаємо: $T_{об} = \Sigma m_i \cdot h_i^2 \cdot \omega^2/2 = I_z \cdot \omega^2/2$, де I_z – осьовий момент інерції тіла відносно вісі обертання OZ →

$$\boxed{T_{об} = I_z \cdot \omega^2/2}$$

Для плоско-паралельного руху тіла кінетична енергія дорівнює сумі енергії поступального руху із швидкістю центра мас та енергії обертального руху навколо центра мас (I_c – момент інерції тіла відносно вісі, що проходить через центр мас тіла):

$$\boxed{T_{пл} = M \cdot V_c^2/2 + I_c \cdot \omega^2/2}$$

В загальному випадку довільного руху твердого тіла кінетична енергія дорівнює сумі енергії поступального руху із швидкістю центра мас та енергії обертального руху навколо миттєвої вісі СР, що проходить через центр мас ($I_{ср}$ – осьовий момент інерції тіла відносно миттєвої вісі СР обертання):

$$\boxed{T_{дов} = M \cdot V_c^2/2 + I_{ср} \cdot \omega^2/2}$$

Контрольні запитання:

1. Що таке кількість руху точки?
2. Що таке кількість руху матеріальної системи?
3. Чому дорівнює кількість руху матеріальної системи у векторній формі?
4. Чому дорівнює кількість руху матеріальної системи у проекційній формі?
5. Що характеризує кількість руху системи?
6. Що таке момент кількості руху точки відносно даного центру?
7. Як визначається за модулем і напрямком момент кількості руху точки відносно даного центру?
8. Що таке кінетичний момент матеріальної системи відносно даного центру?
9. Чому дорівнює кінетичний момент у векторній і проекційній формі?
10. Як визначити кінетичний момент тіла, що обертається навколо нерухомої вісі?
11. Що характеризує кінетичний момент?
12. Що таке кінетична енергія матеріальної системи?
13. Чому дорівнює кінетична енергія поступального руху?
14. Чому дорівнює кінетична енергія обертального руху тіла навколо нерухомої вісі?
15. Чому дорівнює кінетична енергія плоско-паралельного руху?

16. Чому дорівнює кінетична енергія довільного руху?

Література:

1. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. Учеб. для вузов. – М.: Высшая школа, 1995. – С. 280-281, 290-291, 301-304.

Лекція 16. Загальні теореми динаміки

Мета: навчити визначати випадки застосування теореми про рух центру мас системи і теореми про зміну кінетичного моменту.

Знати: диференціальні рівняння руху матеріальної системи, теорему про рух центру мас системи і теорему про зміну кінетичного моменту, закон збереження руху центру мас, закон збереження кінетичного моменту.

Вміти: виводити теорему про рух центру мас системи і теорему про зміну кінетичного моменту.

План:

1. Диференціальні рівняння руху матеріальної системи.
2. Теорема про рух центру мас системи.
3. Теорема про зміну кінетичного моменту (теорема моментів).

Зміст:

1. Розглянемо систему, що складається з n матеріальних точок. Відішлемо довільну точку системи з масою m_i. Позначимо рівнодійну усіх прикладених к точці зовнішніх сил (активних і реактивних) через $\overline{F}_i^{з}$, а рівнодійну усіх внутрішніх сил – через $\overline{F}_i^{в}$. Якщо точка має прискорення $\overline{a}_i$, то з основним законом динаміки: $m_i\overline{a}_i=\overline{F}_i^{з}+\overline{F}_i^{в}$. Аналогічний результат отримаємо для будь-якої точки системи. Значить для усієї системи отримаємо:

$$\boxed{\begin{array}{l} m_1\overline{a}_1=\overline{F}_1^{з}+\overline{F}_1^{в} \\ m_2\overline{a}_2=\overline{F}_2^{з}+\overline{F}_2^{в} \\ . \\ . \\ . \\ m_n\overline{a}_n=\overline{F}_n^{з}+\overline{F}_n^{в} \end{array}} \quad (1)$$

– <u>диференціальні рівняння</u> руху системи у векторній формі.

Проекція рівнянь (1) на координатні вісі дасть диференціальні рівняння руху системи у проекційній формі. Наприклад, для вісі ОХ отримаємо:

$$\boxed{\begin{array}{l} m_{1x}\overline{a}_{1x}=\overline{F}_{1x}^{з}+\overline{F}_{1x}^{в} \\ m_{2x}\overline{a}_{2x}=\overline{F}_{2x}^{з}+\overline{F}_{2x}^{в} \\ . \\ . \\ . \\ m_{nx}\overline{a}_{nx}=\overline{F}_{nx}^{з}+\overline{F}_{nx}^{в} \end{array}}$$

2. При розв'язанні задач динаміки часто необхідно знати закон руху центра мас системи або твердого тіла. Для отримання необхідної залежності складемо рівняння (1):

$$\Sigma m_i \overline{a}_i = \Sigma \overline{F}_i^{з} + \Sigma \overline{F}_i^{в} \quad (2)$$

Перетворимо ліву частину рівняння (2). Для цього використаємо формулу для визначення положення центра мас системи у векторній формі: $\Sigma m_i \overline{r}_i = M \overline{R}_c$ (3), де $\overline{R}_c$ – радіус-вектор центр мас; М – маса усієї системи або тіла. Продиференціюємо рівняння (3) двічі за часом: $\Sigma m_i \cdot (d^2 \overline{r}_i / dt^2) = M \cdot (d^2 \overline{R}_c / dt^2) \rightarrow \Sigma m_i \overline{a}_i = M \overline{a}_c$ (4).

Врахуємо також властивості внутрішніх сил: $\Sigma \overline{F}_i^{в} = 0$ (5). В результаті, з урахуванням залежностей (4) і (5), рівняння (2) прийме вигляд:

$$\boxed{M \cdot \overline{a}_c = \Sigma \overline{F}_i^{з}} \quad (6)$$

– теорема про рух центра мас системи у векторній формі: добуток маси системи або тіла на прискорення руху його центра мас дорівнює геометричній сумі усіх діючих на систему або тіло зовнішніх сил.

Якщо спроектувати рівняння (6) на координатні вісі, то отримаємо теорему про рух центру мас системи у координатній формі: добуток маси системи або тіла на проекцію прискорення руху його центра мас на деяку вісь координат дорівнює сумі проекцій усіх діючих на систему або тіло зовнішніх сил на ту ж саму вісь:

$$\boxed{\begin{aligned} M \cdot a_{cx} &= \Sigma F_{ix}^{з} \\ M \cdot a_{cy} &= \Sigma F_{iy}^{з} \\ M \cdot a_{cy} &= \Sigma F_{iy}^{з} \end{aligned}}$$

Теоретична цінність теореми полягає у тому, що центр мас системи або тіла рухається як матеріальна точка, маса якої дорівнює масі усієї системи або тіла і до якої прикладені усі зовнішні сили, що діють на систему або тіло. Тому поступальний рух тіла зводиться до вивчення характеру руху центру мас. В останніх випадках тіло як матеріальна точка розглядається, коли для визначення його положення достатньо знати положення центру мас і коли можна не враховувати обертальний рух частин тіла.

Практична цінність теореми полягає у тому, що теорема дозволяє при визначенні закону руху центру мас не враховувати внутрішні сили.

Висновками із теореми є закони збереження.

Закон збереження руху центра мас у векторній формі: якщо сума усіх зовнішніх сил, що діють на систему або тіло, дорівнює нулю, то центр мас цієї системи рухається з постійною за модулем і напрямком швидкістю, тобто рівномірно і прямолінійно: $\Sigma \overline{F}_i^з = 0 \rightarrow \overline{a}_c = 0 \rightarrow \overline{V}_c = const$.

Закон збереження руху центра мас у проекційній формі: якщо сума проекцій усіх зовнішніх сил, що діють на систему або тіло, на будь-яку вісь координат дорівнює нулю, то проекція швидкості центру мас системи або тіла на цю вісь є величина постійна: $\Sigma F_{ix}^з = 0 \rightarrow a_{cx} = 0 \rightarrow V_{cx} = const$.

3. Розглянемо довільну точку системи. Запишемо формулу для визначення вектор-моменту кількості руху даної точки відносно деякого центру O: $\overline{M_o(m\overline{V})} = \overline{r_A} \times m\overline{V}$. Продиференціюємо цей вираз за часом: d($\overline{r_A} \times m\overline{V}$) / dt = (d $\overline{r_A}$ /dt)×m $\overline{V}$ + $\overline{r_A}$ ×m·(d $\overline{V}$ /dt) = $\overline{V}$ ×m $\overline{V}$ + $\overline{r_A}$ ×m $\overline{a}$ = 0 + $\overline{r_A}$ ×m $\overline{a}$ = $\overline{r_A} \times \overline{F} = \overline{M_o(\overline{F})}$ – отже, в результаті диференціювання отримали момент сили $\overline{F}$, що викликає рух точки, відносно того ж центру O. Аналогічний результат можна отримати для будь-якої точки системи або тіла. Значить, можна записати:

$$\boxed{d\overline{K_O}/dt = \Sigma \overline{M_o(\overline{F_i^з})}}$$

– теорема про зміну кінетичного моменту (теорема моментів): похідна за часом від кінетичного моменту відносно деякого нерухомого центру O дорівнює сумі моментів усіх зовнішніх сил, що впливають на систему або тіло, відносно того ж центру.

Дану теорему можна записати в проекційній формі: похідна за часом від кінетичного моменту відносно даної вісі координат дорівнює сумі моментів усіх зовнішніх сил, що впливають на систему або тіло, відносно тієї є вісі:

$$\begin{gathered} \text{d}K_X/\text{dt} = \Sigma M_X(\overline{F_i^з}) \\ \text{d}K_У/\text{dt} = \Sigma M_У(\overline{F_i^з}) \\ \text{d}K_Z/\text{dt} = \Sigma M_Z(\overline{F_i^з}) \end{gathered}$$

Теорема моментів широко використовується при вивченні обертального руху тіла, в теорії гіроскопів, в теорії удару. При вивченні руху тіла в загальному випадку поступальна частина руху вивчається за допомогою теореми про рух центру мас, який обирається полюсом, а обертальна частина – за допомогою теореми моментів. Тому теорема моментів застосовується при вивченні вільних тіл.

Теорема моментів також дозволяє не враховувати внутрішні сили.

Висновками із теореми моментів є закони збереження.

Закон збереження кінетичного моменту у векторній формі: якщо сума моментів відносно даного центру усіх прикладених к системі зовнішніх сил дорівнює нулю, то кінетичний момент відносно того ж центру буде постійною за напрямком і модулем величиною: $\Sigma\overline{M_o}(\overline{F_i^з})=0 \rightarrow \overline{K}_O = \text{const}$.

Закон збереження кінетичного моменту в проекційній формі: якщо сума моментів усіх діючих н систему або тіло зовнішніх сил відносно будь-якої вісі координат дорівнює нулю, то кінетичний момент відносно цієї ж вісі буде величиною постійною: $\Sigma M_Z(\overline{F_i^з})=0 \rightarrow K_Z = \text{const}$.

Закони збереження використовують в теорії гіроскопів.

Контрольні запитання:

1. Як записуються диференціальні рівняння руху системи у векторній формі?

2. Як записуються диференціальні рівняння руху системи у проекційній формі?
3. Як формулюється і записується теорема про рух центру мас системи у векторній формі?
4. Як формулюється і записується теорема про рух центру мас системи у проекційній формі?
5. У чому полягає теоретична і практична цінність теореми про рух центру мас системи?
6. Як формулюється і записується закон збереження руху центру мас у векторній формі?
7. Як формулюється і записується закон збереження руху центру мас у проекційній формі?
8. Як формулюється і записується теорема про зміну кінетичного моменту у векторній формі?
9. Як формулюється і записується теорема про зміну кінетичного моменту у проекційній формі?
10. У яких випадках використовується теорема про зміну кінетичного моменту?
11. Як формулюється і записується закон збереження кінетичного моменту у векторній формі?
12. Як формулюється і записується закон збереження кінетичного моменту у проекційній формі?

Література:

1. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. Учеб. для вузов. – М.: Высшая школа, 1995. – С. 273-276, 292-294.

Лекція 17. Загальні теореми динаміки

Мета: навчити визначати випадки застосування теореми про зміну кількості руху, теореми про зміну кінетичної енергії; розуміти роль роботи сили і потужності при характеристиці руху.

Знати: теорему про зміну кількості руху в диференціальній та інтегральній формах, поняття і формули для визначення імпульсу сили, закони збереження кількості руху, формули для визначення елементарної і кінцевої роботи сили у натуральній і координатній формах, формули для визначення потужності, теорему про зміну кінетичної енергії точки і системи.

Вміти: виводити теорему про зміну кількості руху в диференціальній та інтегральній формах, теорему про зміну кінетичної енергії точки і системи, визначати потужність.

План:

1. Теорема про зміну кількості руху системи.
2. Робота сили, потужність.
3. Теорема про зміну кінетичної енергії.

Зміст:

1. Розглянемо систему, що складається із n матеріальних точок. використаємо для її аналізу рівняння $\Sigma m_i \overline{a}_i = \Sigma \overline{F}_i^з + \Sigma \overline{F}_i^в$, де $\Sigma \overline{F}_i^в = 0$ (властивість внутрішніх сил), а вираз $\Sigma m_i \overline{a}_i$ можна представити в іншій формі: $\Sigma m_i \overline{a}_i = \Sigma m_i(d\overline{V}_i/dt) = d(\Sigma m_i \overline{V}_i)/dt = d\overline{Q}/dt$, де $\overline{Q} = \Sigma m_i \overline{V}_i$ – кількість руху системи. При перетворені враховано властивість: сума похідних дорівнює похідної від суми. В результаті можна записати:

$$\boxed{d\overline{Q}/dt = \Sigma \overline{F}_i^з}$$

– <u>теорема про зміну кількості руху системи в диференціальній формі</u>: похідна за часом від кількості руху системи дорівнює геометричній сумі усіх діючих на систему зовнішніх сил.

<u>Теорему про зміну кількості руху можна записати в проекційній формі</u>:

$$dQ_X/dt = \Sigma F_{ix}^{з}$$
$$dQ_Y/dt = \Sigma F_{iy}^{з}$$
$$dQ_Z/dt = \Sigma F_{iz}^{з}$$

– похідна за часом від проекції кількості руху на дану вісь координат дорівнює сумі проекцій на ту саму вісь усіх зовнішніх сил, що діють на систему або тіло.

Теорему про зміну кількості руху можна представити в іншій формі, якщо взяти у мить часу t=0 кількість руху системи $\overline{Q}_0$, а у мить t_1 – $\overline{Q}_1$, то можна записати: $d(\overline{Q}_1 - \overline{Q}_0)/dt = \Sigma \overline{F}_i^{з} \rightarrow d(\overline{Q}_1 - \overline{Q}_0) = \Sigma \overline{F}_i^{з} \cdot dt \rightarrow \overline{Q}_1 - \overline{Q}_0$

$$= \Sigma \int_0^{t_1} \overline{F}_i^{з} \cdot dt \rightarrow$$

$$\boxed{\overline{Q}_1 - \overline{Q}_0 = \Sigma \overline{S}_i^{з}}$$

– <u>теорема про зміну кількості руху системи в інтегральній формі</u>: зміна кількості руху системи за проміжок часу дорівнює сумі імпульсів $\overline{S}_i^{з}$ діючих на систему зовнішніх сил за той же проміжок часу.

<u>Імпульс сили</u> $\overline{S}$ – це векторна величина, яка характеризує дію сили на систему або тіло за деякий проміжок часу.

<u>Елементарний імпульс сили</u> – векторна величина $d\overline{S}$, яка співпадає з напрямком сили $\overline{F}$ і модуль якої дорівнює добутку модуля цієї сили на елементарний проміжок часу dt: $d\overline{S} = \overline{F} \cdot dt$.

$$[S] = [кг \cdot м / с]$$

<u>Імпульс сили за деякий проміжок часу</u> дорівнює визначеному інтегралу від елементарного імпульсу, узятому в межах від нуля до t_1:

$$\boxed{\overline{S} = \int_0^{t_1} \overline{F} \cdot dt}$$

Імпульс сили можна записати в проекційній формі:

$$S_X = \int_0^{t_1} F_X \cdot dt;\ S_Y = \int_0^{t_1} F_Y \cdot dt;\ S_Z = \int_0^{t_1} F_Z \cdot dt$$

$$S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2 + S_z^2}$$

Теорема про зміну кількості руху застосовується при вивчені рідини, газів, в теорії удару, реактивного руху.

Висновками із теореми є закони збереження.

Закон збереження кількості руху в векторній формі: якщо геометрична сума усіх зовнішніх сил, що діють на систему, дорівнює нулю, то вектор кількості руху системи або тіла буде постійним за модулем і напрямком: $\Sigma \overline{F}_i^з = 0 \rightarrow \overline{Q} = const$.

Закон збереження кількості руху в проекційній формі: якщо сума проекцій усіх діючих зовнішніх сил на будь-яку вісь дорівнює нулю, то проекція кількості руху системи або тіла на ту ж саму вісь буде величиною постійною: $\Sigma F_{ix}^з = 0 \rightarrow Q_X = const$.

Закон збереження кількості руху застосовують, коли по зміні поступальної швидкості однієї частини системи необхідно визначити швидкість іншої частини (теорія удару тощо).

2. Робота сили – це скалярна величина, що характеризує вплив сили н деякому переміщенні.

Елементарна робота в натуральній формі – це скалярна величина, що дорівнює добутку дотичної складової сили на модуль елементарного переміщення точки:

$$dA = F_\tau \cdot dS$$

Виходячи з формули, робота – це міра того впливу сили, яке призводить до зміни модуля швидкості точки (дотична сила).

Якщо виразити елементарну роботу через повну сили, то отримаємо вираз: $dA = F \cdot dS \cdot \cos\alpha$, де α – кут між напрямками повної сили та її дотичної складової. Із аналізу формули можна з'ясувати знаки роботи: 1) якщо кут $\alpha < 90^o$ (гострий), то робота сили додатна ($\cos\alpha > 0$); 2) якщо кут $\alpha > 90^o$ (тупий), то робота сили від'ємна ($\cos\alpha < 0$); 3) якщо кут $\alpha = 90^o$ (прямий), то робота сили дорівнює нулю ($\cos\alpha = 0$). Тобто, якщо сила перпендикулярна напрямку руху точки, то робота такої сили на будь-якому переміщенні дорівнює нулю.

Знак роботи характеризує вплив сили на параметри руху. Так, якщо робота додатна, то дотична складова сили спрямована у бік руху точки, в результаті чого точка рухається прискорено. Якщо робота сили від'ємна, то сила уповільнює рух точки.

Елементарну роботу можна записати в координатній формі – елементарна робота дорівнює сумі добутків проекцій сили на координатні вісі на елементарні переміщення уздовж цих висей:

$$dA = F_x \cdot dx + F_y \cdot dy + F_z \cdot dz.$$

Робота сили на кінцевому переміщенні M_0M_1 дорівнює узятому уздовж цього переміщення інтегралу від елементарної роботи:

$$\boxed{A(M_0M_1) = \int_{M_0}^{M_1} F_\tau \cdot dS = \int_{M_0}^{M_1} (F_x \cdot dx + F_y \cdot dy + F_z \cdot dz)} \quad (1)$$

$$[A] = [Дж]$$

Для абсолютно твердого тіла робота внутрішніх сил дорівнює нулю, так як відстані між точками тіла залишаються незмінними. Такі системи точок називають незмінними. Є випадки, коли внутрішні сили здійснюють роботу, наприклад, для системи снаряд-знаряддя сили тиску порохових газів є внутрішніми, але вони здійснюють роботу.

Робота ідеальних в'язей також дорівнює нулю (реакція перпендикулярна переміщенню).

Потужність – це скалярна величина, яка визначає роботу, що здійснює сила в одиницю часу.

При рівномірній роботі потужність дорівнює відношенню роботи до часу її виконання:

$$\boxed{N = A / t}$$

$$[N] = [\text{Вт}]$$

$$1\text{л.с.} = 736\ \text{Вт}$$

У загальному випадку: $N = dA / dt = F_\tau \cdot (dS / dt) \rightarrow$

$$\boxed{N = F_\tau \cdot V}$$

– потужність дорівнює добутку дотичної складової сили на швидкість руху точки.

Роботу можна вимірювати добутком потужності на час роботи, звідки пішла одиниця кіловат-година 1 кВт·год = $3{,}6 \cdot 10^6$ Дж.

3. Робота сили пов'язана з кінетичною енергією (однакові розмірності Дж). Для виведення необхідної залежності розглянемо матеріальну точку з масою m, що переміщується з положення M_0, де вона має швидкість V_0, в положення M_1, де її швидкість дорівнює V_1. Використаємо одне з диференціальних рівнянь руху точки в натуральній формі: $m \cdot a_\tau = \Sigma F_{i\tau}$, зробимо при цьому заміну $a_\tau = dV/dt = (dV/ds) \cdot (ds/dt) = V \cdot (dV/ds)$. В результаті отримаємо: $m \cdot V \cdot (dV/ds) = \Sigma F_{i\tau} \rightarrow m \cdot V \cdot dV = \Sigma F_{i\tau} \cdot ds \rightarrow m \cdot (dV^2/2) = \Sigma A_i \rightarrow d(m \cdot V^2/2) = \Sigma A_i$. Проінтегруємо останній вираз в межах, що відповідають значенням змінних у точках M_0 і M_1 і отримаємо:

$$\boxed{m \cdot V_1^2/2 - m \cdot V_0^2/2 = \Sigma A_i(M_0M_1)}$$

– теорема про зміну кінетичної енергії точки: зміна кінетичної енергії точки на деякому її переміщенні дорівнює алгебраїчній сумі робіт усіх діючих на точку сил на цьому ж переміщенні.

Теорема про зміну кінетичної енергії системи: зміна кінетичної енергії системи на деякому переміщенні дорівнює сумі робіт на тому ж переміщенні зовнішніх і внутрішніх сил, що впливають на систему:

$$\boxed{T_1 - T_0 = \Sigma A_i} \quad \text{або} \quad \boxed{\Sigma m_i \cdot V_{i1}^2/2 - \Sigma m_i \cdot V_{i0}^2/2 = \Sigma A_i}$$

Для незмінної системи враховується робота тільки зовнішніх сил.

Теорема дозволяє виключити із рівнянь наперед невідомі реакції ідеальних в'язей.

Якщо враховуються сили тертя, то в рівняння додається робота цих сил.

Теорема про зміну кінетичної енергії дозволяє вирішувати основні задачі динаміки: 1) знаючи закон зміни швидкості, можна визначити роботу діючих сил (перша задача); 2) знаючи роботу діючих сил, визначити закон зміни швидкості (другу задача).

Із аналізу формули (1) видно, що для використання теореми необхідно, щоб сили були постійними або залежали від положення (координати) точок системи.

Контрольні запитання:

1. Як формулюється і записується теорема про зміну кількості руху системи у диференційній векторній формі?
2. Як формулюється і записується теорема про зміну кількості руху системи у диференційній проекційній формі?
3. Як формулюється і записується теорема про зміну кількості руху системи і інтегральній векторній формі?
4. Що таке імпульс сили?
5. Чому дорівнює імпульс елементарний і за кінцевий проміжок часу у векторній формі?
6. Як формулюється закон збереження кількості руху в векторній формі?
7. Як формулюється закон збереження кількості руху в проекційній формі?
8. Коли застосовують теорему про зміну кількості руху і закон збереження кількості руху?

9. Що таке робота сили?
10. Чому дорівнює елементарна робота сили в натуральній і координатній формах?
11. Що характеризує знак роботи?
12. Чому дорівнює робота на кінцевому переміщенні?
13. Коли робота дорівнює нулю?
14. Що таке потужність?
15. Чому дорівнює потужність?
16. Як формулюється і записується теорема про зміну кінетичної енергії точки?
17. Як формулюється і записується теорема про зміну кінетичної енергії системи?

Література:

1. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. Учеб. для вузов. – М.: Высшая школа, 1995. – С. 281-283, 208-210, 213-215, 301.

Лекція 18. Окремі випадки обчислення роботи

Мета: навчити визначати роботу окремих сил і моменту.

Знати: формули для визначення роботи сили тяжіння, сили пружності, сили тертя, моменту сили.

Вміти: розраховувати роботу сили тяжіння, сили пружності, сили тертя, моменту сили.

План:

1. Робота сили тяжіння.
2. Робота сили пружності.
3. Робота сили тертя, робота моменту сили.

Зміст:

1. Нехай точка М, на яку діє сила тяжіння $\overline{P}$, переміщується із положення $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ у положення $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$. Введемо систему координат так, щоб вісь OZ була спрямована вертикально вгору, тоді проекції сили тяжіння будуть дорівнювати: $P_x = P_y = 0$, $P_z = –P$.

Підставимо отримані проекції в загальну формулу визначення роботи:

$$A(M_0M_1) = \int_{M_0}^{M_1} F_\tau \cdot dS = \int_{M_0}^{M_1} (F_x \cdot dx + F_y \cdot dy + F_z \cdot dz),\ (1)$$

В результаті отримаємо:

$A(M_0M_1) = \int_{z_0}^{z_1} -P \cdot dz = P(z_0 - z_1)$. Якщо точка M_0 вище M_1, то $z_0 - z_1 = h$, де h – вертикальне переміщення точки; якщо точка M_0 нижче M_1, то $z_0 - z_1 = –h$, тобто робота сили тяжіння додатна, коли точка у підсумку переміщується донизу. Таким чином, робота сили тяжіння дорівнює узятому із відповідним знаком добутку модуля сили на вертикальне переміщення точки її прикладення:

Робота сили тяжіння не залежить від траєкторії точки її прикладення – такі сили мають назву потенційні.

$$\boxed{A_{mg} = \pm mgh}$$

2. Розглянемо вантаж М, що лежить на горизонтальній площині і закріплений до вільного кінця пружини. Точка О позначає положення ненапруженої пружини ($AO=l_0$), приймемо її за початок координат. Якщо відтянути вантаж від рівноважного стану О, розтягнувши пружину до величини l_1, то пружина отримає подовження $\lambda = l_1 - l_0$. При цьому на вантаж буде діяти сила пружності $\overline{F}_{пруж}$, спрямована до точки О. Якщо прийняти $\lambda=x$, то модуль сили пружності буде дорівнювати: $F_{пруж}= c\cdot x$; проекція сили на вісі координат: $F_y=F_z=0$, $F_x= - c\cdot x$.

Знайдемо роботу сили пружності при переміщенні із положення M_0 в положення M_1, використовуючи формулу (1):

$$A(M_0M_1) = \int_{x_0}^{x_1} (-cx)\cdot dx = (c/2)\cdot(x^2{}_1 - x^2{}_0) = (c/2)\cdot(x^2{}_0 - x^2{}_1) \text{ або}$$

$$A(M_0M_1)= (c/2)\cdot(\lambda^2{}_0 - \lambda^2{}_1) \rightarrow$$

Робота сили пружності дорівнює половині добутку коефіцієнта жорсткості с на різність квадратів початкового і кінцевого подовжень (або стискань) пружини:

$$\boxed{A_{пруж} = (c/2)\cdot(\lambda^2_0 - \lambda^2_1)}$$

Робота сили пружності додатна, коли кінець пружини наближається до рівноважного стану $\lambda_0 > \lambda_1$.

Робота сили пружності не залежить від траєкторії руху точки, тобто сила пружності потенційна.

3. Розглянемо точку М, що рухається по шорсткій поверхні або кривій. Діюча на точку сила тертя за модулем дорівнює $F_{тер} = f\cdot N$, де f – коефіцієнт тертя; N – нормальна реакція поверхні. Спрямована сила тертя по дотичній до траєкторії руху точки протилежно швидкості, тому проекція сили на дотичну вісь буде від'ємною: $F_\tau = -F_{тер} = -f\cdot N$. Значить, на основі формули (1) отримаємо:

$$A(M_0M_1) = \int_{M_0}^{M_1} F_\tau\cdot dS = \int_{M_0}^{M_1} (-F_{тер})\cdot dS = -\int_{M_0}^{M_1} f\cdot N\cdot dS.$$

$$\boxed{A_{тер} = -\int_{M_0}^{M_1} f\cdot N\cdot dS}$$

Якщо сила тертя постійна, то $\boxed{A_{тер} = -f\cdot N\cdot S}$, де S – пройдений шлях.

Таким чином, робота постійної сили тертя дорівнює добутку коефіцієнту тертя на нормальну реакцію поверхні на пройдений шлях і завжди від’ємна.

Робота сили тертя залежить від пройденого шляху, значить від форми траєкторії руху, тому сила тертя вважається не потенційною.

Розглянемо рух точки К по окружності, яка під впливом крутильного моменту М переміщується і положення K_0, що задається кутом обороту φ_0, в положення K_1, що задається кутом φ_1. Використаємо формулу для визначення елементарної роботи в натуральній формі $dA = F_\tau \cdot dS$. Виразимо дотичну силу через крутильний момент, а елементарне переміщення – через елементарний кут повороту: $F_\tau = M/r$, $ds = r \cdot d\varphi$, де r – радіус окружності → $dA = M \cdot d\varphi$ – елементарна робота моменту. Для визначення роботи моменту на кінцевому повороті застосуємо інтеграл:

$$A_M = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} M \cdot d\varphi = M(\varphi_1 - \varphi_0) \rightarrow \quad \boxed{A_M = M(\varphi_1 - \varphi_0)}$$

Таким чином, робота моменту дорівнює добутку моменту на зміну кута обороту, що відповідає переміщенню точки по окружності.

Контрольні запитання:

1. Чому дорівнює робота сили тяжіння?
2. Коли робота сили тяжіння додатна?
3. Що таке потенційна сила?
4. Чому дорівнює робота сили пружності?
5. Чому дорівнює робота сили тертя змінної і постійної?
6. Чому дорівнює робота моменту сили?

Література:

1. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. Учеб. для вузов. – М.: Высшая школа, 1995. – С. 210-213, 305-306.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Бондаренко А.А. та інші Теоретична механіка. – Ч. 1: Статика. Кінематика. – К.: Знання, 2004. – 599 с.
2. Бондаренко А.А. та інші Теоретична механіка. – Ч. 2: Динаміка. – К.: Знання, 2004. – 590 с.
3. Павловський М.А. Теоретична механіка. – К.: Техніка, 2002. – 511 с.
4. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. Учеб. для вузов. – М.: Высшая школа, 1995. – 416 с.

Навчальне видання

Ворох Андрій Олександрович

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

Конспект лекцій

Відповідальний випусковий: Ворох А.О.

Формат 60х84. 1/16. Умов.друк.арк. 3,5. Тираж 10 прим.

61003, м. Харків, вул. Університетська, 16.