

Литвин О.О., Пащенко О.О.

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ВІДНОВЛЕННЯ ФУНКЦІЙ АЛГЕБРАЇЧНИМ МЕТОДОМ З РЕГУЛЯРИЗАЦІЄЮ

Навчально-науковий інститут «УПА» ХНУ ім. В.Н. Каразіна

Дана робота присвячена проблемі відновлення функцій двох змінних. Тема актуальна, знаходить застосування в багатьох областях науки та техніки, зокрема в комп'ютерній томографії. Об'єктом дослідження є процес відтворення внутрішньої структури тіла на основі проєкційних даних, що надходять з комп'ютерного томографа. Досліджувався алгебраїчний метод відновлення функцій, в якому для розв'язання отримуваної системи лінійних алгебраїчних рівнянь, що є перевизначеною, використовувався метод регуляризації [1].

Зауважимо, що задача розв'язання такої системи є некоректно поставленою. Для її розв'язання засосовуються спеціальні методи. Метод регуляризації дає наближений розв'язок системи, який називається нормальним. Заданою інформацією для задачі відновлення функцій є проєкційні дані, що надходять з комп'ютерного томографа. Наближений розв'язок будувався на основі кусково-лінійних функцій [2, 3]. Проведено обчислювальний експеримент, в якому задана інформація подавалась з використанням тестових задач. Наводиться аналіз результатів.

Отже, відомі проєкційні дані γ_k вздовж прямих L_k :

$$\int_{L_k} f(x, y) dl = \gamma_k, \quad k = \overline{1, N}.$$

Потрібно відновити функцію $f(x, y)$ за відомими значеннями γ_k та прямими лініями $L_k : x \cos \varphi_k + y \sin \varphi_k - s_l = 0$.

Наближений розв'язок, отриманий на основі кусково-лінійних координатних функцій

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} h_i(x) H_j(y).$$

Тут $h_i(x)$, $H_j(y)$ кусково-лінійні функції.

Система лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} \int_{a_k}^{b_k} h_i(S_L \cos \varphi_k - t \sin \varphi_k) H_j(S_L \sin \varphi_k - t \cos \varphi_k) dt = \gamma_{k,l},$$

де c_{ij} – невідомі у системі.

Далі використовується метод регуляризації для розв'язання системи.

Приклад. Тестова функція задана в квадраті $[1,1] \times [-1,1]$ з носієм у двох кругах радіусу r_2 :

$$f_2(x, y) = \sum_{i=0}^{K_{12}-1} \begin{cases} -\frac{1}{r_2^2} \left((x - a_{2i})^2 + (y - b_{2i})^2 - r_2^2 \right), & (x - a_{2i})^2 + (y - b_{2i})^2 < r_2^2, \\ 0, & (x - a_{2i})^2 + (y - b_{2i})^2 \geq r_2^2. \end{cases}$$

Тут r_2 – радіус кругів; a_{2i}, b_{2i} – координати центрів кругів, K_{12} – кількість кругів.

Ці параметри такі: $r_2 = 0,3$, $a_{2i} = \begin{pmatrix} 0,4 \\ -0,4 \end{pmatrix}$, $b_{2i} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $K_{12} = 2$.

Задача полягає у відновленні цієї функції.

Результати обчислень наведено в таблиці.

Таблиця – Порівняння результатів відновлення функції

Тестова функція	n	n^2	NN	MM	NN · MM	Похибки			α
						δ_1	δ_2	δ_3	
$f_2(x, y)$	25	625	26	26	676	0,0400	0,0018	0,0054	0,018
	28	784	30	30	900	0,0063	0,0016	0,0048	0,021

В наведеній таблиці n – кількість розбиття по осях координат при дискретизації області; n^2 – кількість невідомих; NN – кількість прямих вздовж кожного напрямку; MM – кількість напрямків; NN · MM – кількість рівнянь в системі; $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ – абсолютна, відносна та середньо-квадратична похибки відповідно; α – параметр регуляризації.

Аналіз результатів показує, що зі збільшенням кількості рівнянь в системі, що означає збільшення напрямків сканування, похибки зменшуються.

Далі наводяться графічні ілюстрації заданої та відтвореної функції, їх ліній рівня та півтонові зображення.

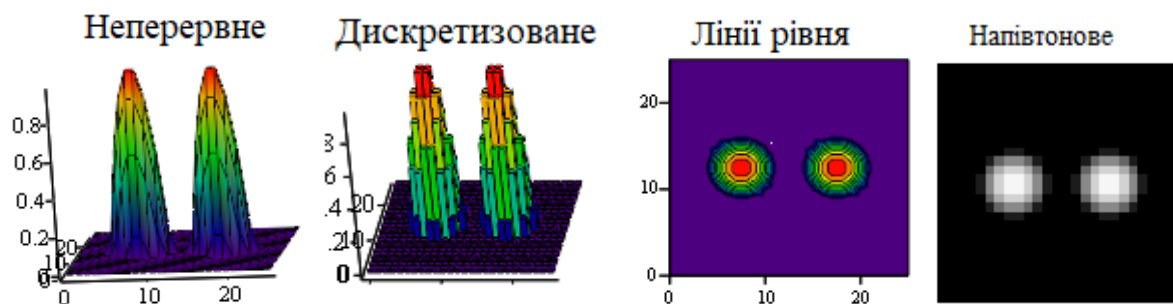


Рисунок 1 – Зображення заданої функції $f_2(x, y)$ та її ліній рівня

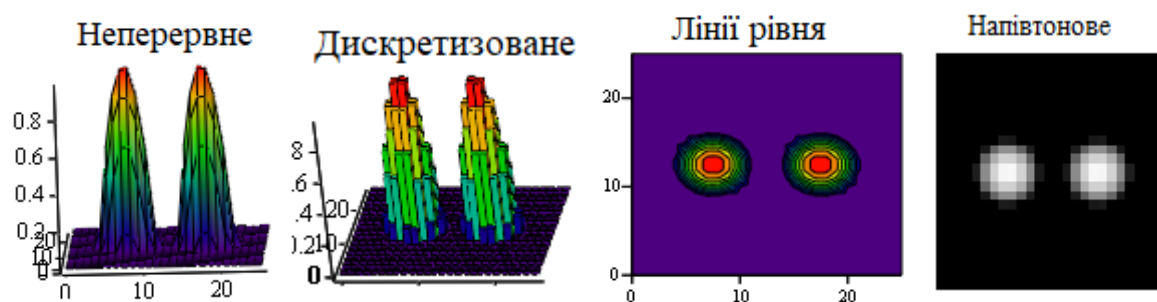


Рисунок 2 – Зображення відновленої функції $f_2(x, y)$ та її ліній рівня

Наведені результати підтверджують ефективність методу.

Список літератури:

1. Natterer F. The Mathematics of Computerized Tomography. Society for Industrial and Applied Mathematics. 2001. 222 p.
2. Литвин О. М. Інтерлінація функцій та деякі її застосування. – Харків : Основа, 2002. – 544 с.
3. I. V. Sergienko, V. K. Zadiraka, O. M. Lytvyn, Elements of the General Theory of Optimal Algorithms, Springer Optimization and Its Applications, v. 188, p. 378, Springer Nature Switzerland AG, 2021.