Литвин О.О., Ічко К.В.

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТОМОГРАФІЧНОЇ РЕКОНСТРУКЦІЇ ІТЕРАЦІЙНИМ АЛГЕБРАЇЧНИМ МЕТОДОМ НА ОСНОВІ ІНТЕРЛІНАЦІЇ

Навчально-науковий інститут «УІПА» ХНУ ім. В.Н. Каразіна

У даній роботі досліджується алгебраїчниий метод томографічної реконструкції зображень, який зводиться до розв'язання системи алгебраїчних рівнянь, що є перевизначеною. Для розв'язання системи використовувався ітераційний метод ART (Algebraic Reconstruction Techniques) [1]. Вихідною інформацією є проєкційні дані, що надходять з комп'ютерного томографа. Наближений розв'язок будувався на основі операторів інтерлінації [2, 3]. Проведено обчислювальний експеримент та аналіз результатів дослідження. Робиться висновок про ефективність методу.

Далі коротко основні етапи досліджень.

Виходимо з того, що відомі проєкційні дані γ_k вздовж прямих L_k:

$$\int_{L_k} f(x,y)dl = \gamma_k,\ k=\overline{1,N}. \quad (1)$$

Потрібно відновити функцію $f(x,y)$ за відомими значеннями γ_k та прямими лініями $L_k : x\cos\varphi_k + y\sin\varphi_k - s_l = 0.$

Доведено, що співвідношення (1) зводиться до вигляду:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(s_l\cos\varphi_k - t\sin\varphi, s_l\sin\varphi_k + t\cos\varphi_k)dt = \gamma_{k,l}.$$

Тут враховано, що пряме сканування залежить від двох параметрів. Межі інтегрування уточнюються в залежності від області, якій належить відтворюваний об'єкт.

Схема відтворення функцій алгебраїчними методами така.

Крок 1. Дискретизація області.

Крок 2. Формування наближеного розв'язку, який подається у вигляді лінійної комбінації координатних функцій, коефіцієнти при яких невідомі і є значеннями відновлюваної функції у відповідних точках.

Крок 3. Формування системи лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення зазначених у кроці 2 невідомих коефіцієнтів.

Крок 4. Розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Крок 5. Запис наближеного розв'язку в аналітичному вигляді та оцінка похибок наближення.

Наближений розв'язок, отриманий на основі операторів інтерлінації:

$$f(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n^2}a_{i\mu}h_i(x)H_\mu^*(y)+\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{j=1}^{n^2}b_{\nu j}h_\nu^*(x)H_j(y)-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n^2}c_{ij}h_i(x)H_j(y).$$

Тут $h_i(x)$, $H_\mu^*(y)$, $h_\nu^*(x)$, $H_j(y)$ кусково-сталі функції.

Система лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n^2}a_{i\mu}\int_{a_k}^{b_k}h_i(S_L\cos\varphi_k-t\sin\varphi_k)H_\mu^*(S_L\sin\varphi_k-t\cos\varphi_k)dt+$$

$$+\sum_{\nu=1}^{n^2}\sum_{j=1}^{n}b_{\nu j}\int_{a_k}^{b_k}h_\nu^*(S_L\cos\varphi_k-t\sin\varphi_k)H_j(S_L\sin\varphi_k-t\cos\varphi_k)dt-$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}\int_{a_k}^{b_k}h_i(S_L\cos\varphi_k-t\sin\varphi_k)H_j(S_L\sin\varphi_k-t\cos\varphi_k)dt=\gamma_{k,l},$$

де $a_{i\mu}$, $b_{\nu j}$, c_{ij} – невідомі у системі.

Прикпад. Для формування тестових функцій побудовано набір фінітних функцій $f_1(x,y)-f_5(x,y)$, заданих в квадраті $[-1,1]\times[-1,1]$, з носіями у крузі, еліпсі, квадраті, прямокутнику та ромбі. Тоді, наприклад, тестова функція $f_{415}(x,y)=f_4(x,y)+f_1(x,y)+f_5(x,y)$. Задача полягає у відтворені цих функцій.

Результати обчислень наведено в таблиці.

Таблиця – Порівняння результатів

Тестові функції	n	NN	MM	$NN\cdot MM$	Похибки			ω
					δ_1	δ_2	δ_3	
$f_5(x,y)$	25	26	26	676	0,029	0,002	0,007	0,055
$f_{55}(x,y)$	25	26	26	676	0,039	0,002	0,005	0,095
$f_{415}(x,y)$	25	26	26	676	0,074	0,004	0,006	0,069
$f_{423}(x,y)$	25	26	26	676	0,080	0,004	0,006	0,090

Наводимо геометричну ілюстрацію для однієї з функцій.

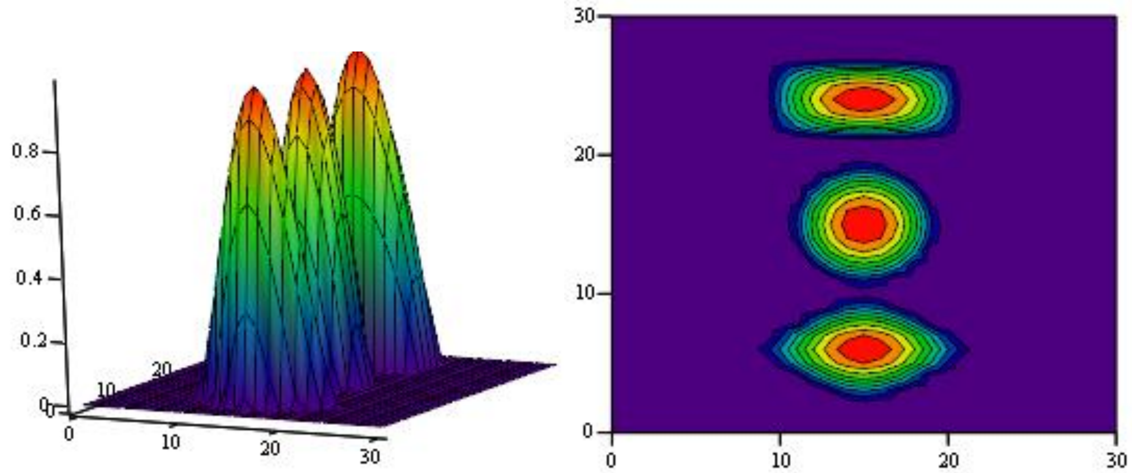

Рисунок 1 – Зображення заданої функції $f_{415}(x,y)$ та її лінії рівня

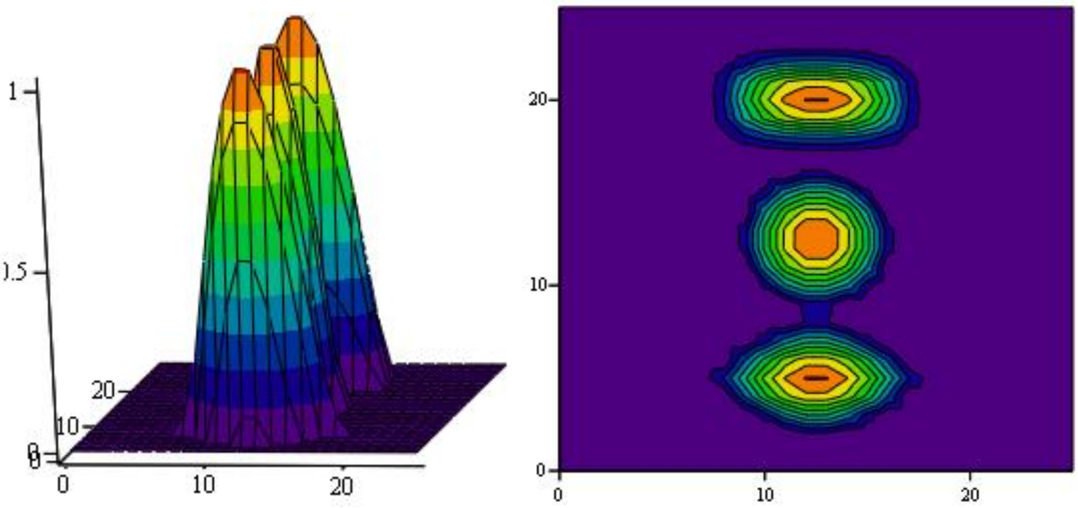

Рисунок 2 – Зображення відтвореної функції $f_{415}(x,y)$ та її лінії рівня

Наведені результати вказують на ефективність методу.

Список літератури:

1. Natterer F. The Mathematics of Computerized Tomography. Society for Industrial and Applied Mathematics. 2001. 222 p.

2. Литвин О. М. Інтерлінація функцій та деякі її застосування. – Харків : Основа, 2002. – 544 с.

3. I. V. Sergienko, V. K. Zadiraka, O. M. Lytvyn, Elements of the General Theory of Optimal Algorithms, Springer Optimization and Its Applications, v. 188, p. 378, Springer Nature Switzerland AG, 2021.