Литвин О.О., Галушка В.В.
ДОСЛІДЖЕННЯ ВИБОРУ КООРДИНАТНИХ ФУНКЦІЙ ПРИ РЕАЛІЗАЦІЇ АЛГЕБРАЇЧНОГО МЕТОДУ ТОМОГРАФІЧНОЇ РЕКОНСТРУКЦІЇ
Навчально-науковий інститут «УІПА» ХНУ ім. В.Н. Каразіна

Дана робота присвячена дослідженню алгебраїчного методу томографічної реконструкції [1], зокрема питанню вибору системи координатних функцій для формування наближенного розв’язку. Алгебраїчний метод призначений для відновлення функцій за відомими проєкційними даними, які надходять з комп’ютерного томографа. Метод базується на перетворенні Радона [2], і зводяться до розв’язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь, яка є перевизначеною. Для її розв’язання застосовуються метод регуляризації та ітераційні методи. Важливим моментом при реалізації методу є вибір координатних функцій при побудові наближеного розв’язку.

У класичному алгебраїчному методі координатні функції кусково-сталі або кусково-лінійні. У даній роботі пропонується і аналізується варіант побудови координатних функцій з використанням операторів інтерлінації [3, 4]. Виходячи з переваг такого підходу, надаються рекомендації щодо застосування.

Грунтуємось на тому, що відомі проєкційні дані γ_k вздовж прямих L_k:

$$\int_{L_k} f(x,y)dl = \gamma_k,\ k=\overline{1,N}. \qquad (1)$$

Треба відновити функцію $f(x,y)$ за відомими значеннями γ_k та прямими лініями L_k. $L_k : x\cos\varphi_k + y\sin\varphi_k - s_l = 0.$

Доведено [1], що співвідношення (1) зводиться до вигляду:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(s_l\cos\varphi_k - t\sin\varphi, s_l\sin\varphi_k + t\cos\varphi_k)dt = \gamma_{k,l}.$$

Відтворення функцій алгебраїчними методами відбувається за такою схемою:

1. Дискретизація області.

2. Формування наближеного розв’язку, який подається у вигляді лінійної комбінації координатних функцій, коефіцієнти при яких невідомі і є значеннями відновлюваної функції у відповідних точках.

3. Формування системи лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення вказаних у пункті 2 невідомих коефіцієнтів.

4. Розв’язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

5. Запис наближеного розв’язку в аналітичному вигляді та оцінка похибки наближення.

Наближений розв’язок, отриманий на основі операторів интерлінації [3,4]:

$$f(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n^2}a_{i\mu}h_i(x)H_\mu^*(y)+\sum_{\nu=1}^{n^2}\sum_{j=1}^{n}b_{\nu j}h_\nu^*(x)H_j(y)-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}h_i(x)H_j(y).$$

Тут $h_i(x), H_\mu^*(y), h_\nu^*(x), H_j(y)$ кусково-сталі функції.

Вигляд розв’язку пов’язаний з дискретизацією області, яка розбивається на елізи (комірки), що є квадратами та прямокутниками. На рисунку 1 навдено схему розташування вузлів в одному елізі при використанні інтерлінації.

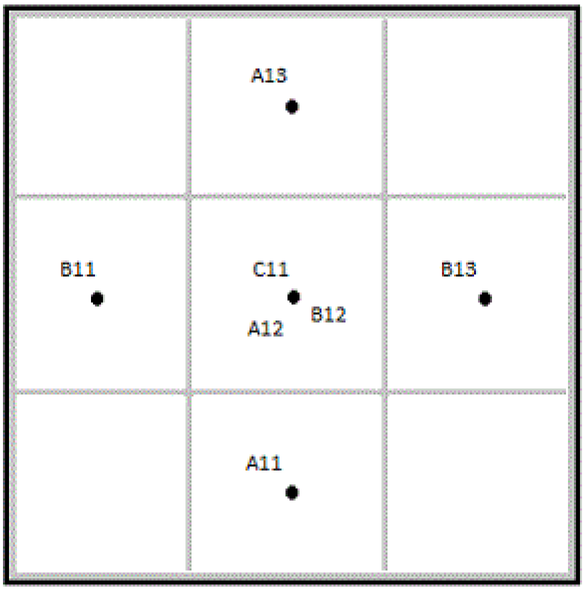

Рисунок 1 – Схема розташування вузлів в одному елізі при використанні інтерлінації

Бачимо перевагу введення інтерлінації у процес відновлення функції за її проєкціями, адже значення функції обчислюється не в одній точці, а одразу у п'ятьох.

Розглянемо питання про кількість невідомих при формуванні розв’язку з використанням інтерлінації та в класичному методі.

Використання інтерлінації функцій призводить до появи $2n^3+n^2$ сталих a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, які є невідомими. При цьому похибка наближення $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

У класичному поданні наближеного розв'язку маємо n^4 сталих c_{ij}, які є невідомими. При цьому похибка наближення теж $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Враховуючи, що $2n^3 + n^2 < n^4, n > 2$, маємо, що кількість невідомих у розв'язку, побудованому з використанням інтерлінації менше, ніж у класичному методі при одному й тому ж порядку похибки. Порівняння показують, що для досягнення однієї і тієї ж точності, при використанні операторів інтерлінації можна брати менше рівнянь. Наприклад, для $n = 9$ кількість невідомих у класичному методі у чотири рази більша (1539 та 6561 відповідно).

З огляду на те, що система рівнянь має бути перевизначеною і слід брати число рівнянь більшим ніж число невідомих, ясно, що в методі з інтерлінацією цих рівнянь буде менше. Отже, маємо переваги використання операторів інтерлінації при побудові координатних функцій.

Обчислювальний експеримент, проведений за допомогою розроблених алгоритмів та програм, підтвердив зазначені твердження.

Список літератури:

1. Natterer F. The Mathematics of Computerized Tomography. Society for Industrial and Applied Mathematics. 2001. 222 p.

2. Radon J. Über die Bestimmung von Functionen durch ihre Integralverte Längs gewisser Manningfaltigkeiten. Ber. Verh. Sächs. Acad. Wiss. Leipzig Math. Nat. Kl. 1917. Vol. 69. P. 262–277

3. Литвин О. М. Інтерлінація функцій та деякі її застосування. – Харків : Основа, 2002. – 544 с.

4. I. V. Sergienko, V. K. Zadiraka, O. M. Lytvyn, Elements of the General Theory of Optimal Algorithms, Springer Optimization and Its Applications, v. 188, p. 378, Springer Nature Switzerland AG, 2021