

Литвин О.М., Томанова І.С.

## ПРО РЕЗУЛЬТАТИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАЧАЧІ ПРО ЗГИН КВАДРАТНОЇ ПЛАСТИНИ ЖОРСТКО ЗАЦЕМЛЕННОЇ НА КРАЯХ

Численне застосування в різноманітних галузях науки та техніки має теорія сплайнів. Основні труднощі, які виникають при вирішенні завдання сплайнами 5-го степеня, пов'язане з відсутністю явного уявлення базисних інтерполяційних поліномів 5-го степеня в кожному трикутнику триангуляції, оскільки за браком указаних базисних функцій виникає необхідність вирішувати в кожному трикутнику систему з 21 невідомою для знаходження всіх 21 коефіцієнта інтерполяційного полінома 5-го степеня.

Наведемо приклад розв'язання наступної бігармонічної задачі:

$$\Delta^2 W(x, y) = q(x, y)$$

$$W|_{\partial G} = 0; \quad \frac{\partial W}{\partial n}|_{\partial G} = 0.$$

Область  $G$  – квадрат вигляду  $G = \{(x, y) : -0.5 \leq x \leq 0.5, -0.5 \leq y \leq 0.5\}$ .

Ділимо область  $G$  на шістнадцять трикутників. Проводимо лінійну нумерацію невідомих параметрів  $c_k$ , які відповідають функціям базисних поліномів 5-го степеня, причому для відповідності крайовим умовам задачі відповідні параметри на границі області  $G$  кладемо рівними нулю.

Знаходимо поліном на кожному трикутнику за формулою:

$$S^{ijk}_5(x, y) = w(x, y) + \sum_{i=1}^3 \left( c_i - \frac{\partial w}{\partial \nu_{ij}} \right) \Big|_{M_i} \cdot H_{i,\beta}(x, y)$$

де  $w(x, y) = \sum_{i=0}^3 \sum_{0 \leq |\beta| \leq 2} c_{i,\beta} \cdot h_{i,\beta}(x, y)$ ,  $\nu_{ij}$  – нормаль до сторони, що з'єднує вершини  $A_i$  та  $A_j$ , точка. Функції  $h_{k,\beta}(x, y)$ ,  $H_{ij}(x, y)$  наведені в роботі[1].

Знаходимо невідомі параметри з умови мінімуму наступного функціоналу:

$$I = \sum_{k=1}^{16} I_k = \sum_{k=1}^{16} \int_{T_k} \left( \left( \frac{\partial S_k^2(x, y)}{\partial x^2} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial S_k^2(x, y)}{\partial x \partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial S_k^2(x, y)}{\partial y^2} \right)^2 - 2q(x, y) S_k(x, y) \right) dx dy \rightarrow \min_c$$

Максимальне значення точного розв'язку[3] досягається в точці (0,0) та дорівнює 0,00126, значення наближеного розв'язку задачі в цій точці становить 0.00127. Різниця між точним розв'язком та наближеним розв'язком-сплайном становить 0.00001.

1. Сергиенко, И.В. Явные формулы для интерполяционных сплайнов 5-й степени на треугольнике / И.В. Сергиенко, О.Н. Литвин, О.О. Литвин, О.И. Денисова. – Кибернетика и системный анализ. – 2014. – Том 50, № 5. – С. 17–33
2. Zlamal, M. Mathematical aspect of the finite element method / M. Zlamal, A. Zeneseck, V. Kolar, J. Kratochvil // Technical physical and mathematical principles of the finite element method. – 1971. – P.15–39
3. Тимошенко, С.П. Пластины и оболочки / С.П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. – М.:Наука. – 1966. – 635 с.