Першиної Ю.І ., Роменко І.Д. (ДТ-ПМ-17мг))

ЗНАХОДЖЕННЯ ЛІНІЙ РОЗРИВУ ФУНКЦІЇ ДВОХ ЗМІННИХ

Дана робота присвячена практичній реалізації методу побудови розривних сплайн-інтерполянтів, які як частинний випадок включають в себе неперервні сплайни.

Будемо вважати, що область наближення повністю розміщена в квадраті $D=[0,1]\times[0,1]$. Нехай область визначення функції лініями $x_0=0,\ x_1=0.5, x_2=1, y_0=0,\ y_1=0.5, y_2=1$ розбита на чотири прямокутники Π_{ij}. Задамо функцію $f(x,y)$ в кутових точках елементів Π_{ij} наступним чином:

$$\Pi_{11}: f^{+,+}(0;0)=f(0+0;0+0)=1 \qquad \Pi_{12}: f^{+,+}(0;0.5)=f(0+0;0.5+0)=1$$
$$f^{+,-}(0;0.5)=f(0+0;0.5-0)=2 \qquad f^{+,-}(0;1)=f(0+0;1-0)=2$$
$$f^{-,-}(0.5;0.5)=f(0.5-0;0.5-0)=1 \qquad f^{-,-}(0.5;1)=f(0.5-0;1-0)=1$$
$$f^{-,+}(0.5;0)=f(0.5-0;0+0)=2 \qquad f^{-,+}(0.5;0.5)=f(0.5-0;0.5+0)=2$$
$$\Pi_{22}: f^{+,+}(0.5;0.5)=f(0.5+0;0.5+0)=3 \qquad \Pi_{21}: f^{+,+}(0.5;0)=f(0.5+0;0+0)=3$$
$$f^{+,-}(0.5;1)=f(0.5+0;1-0)=4 \qquad f^{+,-}(0.5;0.5)=f(0.5+0;0.5-0)=4$$
$$f^{-,-}(1;1)=f(1-0;1-0)=3 \qquad f^{-,-}(1;0.5)=f(1-0;0.5-0)=3$$
$$f^{-,+}(1;0.5)=f(1-0;0.5+0)=4 \qquad f^{-,+}(1;0)=f(1-0;0+0)=4$$

Розривний сплайн будемо будувати у вигляді:

$$S(x,y)=$$
$$=\begin{cases} 1\cdot\dfrac{x-0.5}{-0.5}\dfrac{y-0.5}{-0.5}+2\cdot\dfrac{x}{0.5}\dfrac{y-0.5}{-0.5}+2\cdot\dfrac{x-0.5}{-0.5}\dfrac{y}{0.5}+1\cdot\dfrac{x}{0.5}\dfrac{y}{0.5}, & (x,y)\in\Pi_{11}\\ 1\cdot\dfrac{x-0.5}{-0.5}\dfrac{y-1}{0.5-1}+2\cdot\dfrac{x-1}{0.5-1}\dfrac{y-1}{0.5-1}+2\cdot\dfrac{x-0.5}{-0.5}\dfrac{y-0.5}{1-0.5}+1\cdot\dfrac{x}{0.5}\dfrac{y-0.5}{1-0.5}, & (x,y)\in\Pi_{12}\\ 3\cdot\dfrac{x-1}{0.5-1}\dfrac{y-0.5}{-0.5}+4\cdot\dfrac{x-0.5}{1-0.5}\dfrac{y-0.5}{-0.5}+4\cdot\dfrac{x-1}{0.5-1}\dfrac{y}{0.5}+3\cdot\dfrac{x-0.5}{1-0.5}\dfrac{y}{0.5}, & (x,y)\in\Pi_{21}\\ 3\cdot\dfrac{x-1}{0.5-1}\dfrac{y-1}{0.5-1}+4\cdot\dfrac{x-0.5}{1-0.5}\dfrac{y-1}{0.5-1}+4\cdot\dfrac{x-1}{0.5-1}\dfrac{y-0.5}{1-0.5}+3\cdot\dfrac{x-0.5}{1-0.5}\dfrac{y-0.5}{1-0.5}, & (x,y)\in\Pi_{22} \end{cases}=$$

$$=\begin{cases} 2x+2y-8xy+1, & (x,y)\in\Pi_{11}\\ -10x-6y+8+8xy, & (x,y)\in\Pi_{12}\\ -4xy+2x+2y+2\ , & (x,y)\in\Pi_{21}\\ -8xy+6x+6y-1, & (x,y)\in\Pi_{22} \end{cases}.$$

Як бачимо, функція $S(x,y)$ на границі між елементами Π_{11} і Π_{21} при $x<x_1$ буде мати наступні сліди:

$$S(x,y)=S(x_1-0,y)=S_{11}(x_1,y)=f^{-,+}(0.5;0)\frac{y-y_1}{y_0-y_1}+f^{-,-}(0.5;0.5)\frac{y-y_0}{y_1-y_0},\quad y_0\le y\le y_1,$$

$$S(x,y)=S(x_1+0,y)=S_{21}(x_1,y)=f^{+,+}(0.5;0)\frac{y-y_1}{y_0-y_1}+f^{+,-}(0.5;0.5)\frac{y-y_0}{y_1-y_0},\quad y_0\le y\le y_1.$$

Тобто якщо $f^{-,+}(0.5,0)\ne f^{+,+}(0.5,0)$, то в точці $(0.5;0)$ такий сплайн буде розривним. Крім того, якщо в точці $f^{+,+}(0.5;0.5)\ne f^{+,-}(0.5;0.5)$, то сплайн буде розривним на всій лінії $x=0.5,\ \ y_0\le y\le y_1$.