

УДК 621.9.06-112.6

**РАСЧЕТ КОЛЕБАНИЙ ПОВОРОТНО-ДЕЛИТЕЛЬНЫХ СТОЛОВ  
АГРЕГАТИРОВАННОГО ОБОРУДОВАНИЯ ПРИ НАГРУЖЕНИИ  
ВЕРТИКАЛЬНЫМИ СИЛАМИ**

©Сычев Ю. И.

*Українська інженерно-педагогічна академія***Інформація про автора:**

**Сичов Юрій Іванович:** ORCID: 0000-0002-6576-8083; shanhaj\_2007@ukr.net; кандидат технічних наук; доцент кафедри металоріжучого обладнання і транспортних систем; Українська інженерно-педагогічна академія; вул. Університетська, 16, м. Харків, 61003, Україна.

В статье предлагаются методы определения собственных частот колебаний делительных столов агрегатных станков, полученных в результате численно - аналитического решения дифференциальных уравнений движения делительной стола, как сплошной пластины. Предлагаемая теория, таким образом, позволяет найти спектр собственных частот колебаний упругой системы поворотного стола. если частота возмущающей силы совпадает с одной из собственных частот колебаний, наступает резонанс. Для линейно - упругой системы в постановке линейной теории упругости амплитуды принудительных колебаний превращаются в бесконечными большие. По настоящему так не бывает. Во всех материалах существуют внутреннее трение. Поэтому резонансы на высоких гармониках, как правило, не страшны. Для машиностроительных деталей гармоника выше пятой - шестой во внимание не принимаются. Но резонанс на основном тоне или на первых гармониках может считаться причиной неизбежной поломки.

**Ключевые слова:** колебания; поворотно-делительный стол; сила резания; агрегатный станок; спектр частот.

**Сичов Ю. І.** «Розрахунок коливань поворотно - ділильних столів агрегатованого обладнання при навантаженні вертикальними силами».

В статті пропонуються методи визначення власних частот коливань ділильних столів агрегатних верстатів, здобутих у результаті чисельно – аналітичного розв’язання диференціальних рівнянь руху ділильного стола, як суцільної пластины. . Пропонована теорія, таким чином, дозволяє знайти спектр власних частот коливань пружної системи поворотного стола. якщо частота збурюючої сили співпадає з однією з власних частот коливань, наступає резонанс. Для лінійно – пружної системи в постановці лінійної теорії пружності амплітуди примусових коливань перетворюються у безкінцево великі. По справжньому так не буває. У всіх матеріалах існують внутрішнє тертя. Тому резонанси на високих гармоніках, як правило, не страшні. Для машинобудівних деталей гармоніки вище п’ятої – шостої до уваги не приймаються. Але резонанс на основному тоні або на перших гармоніках може вважатися причиною неминучої поломки.

**Ключові слова:** коливання; поворотно-ділильний стіл; сила різання; агрегатний верстат; спектр частот.

*Sychev Yu.* “Calculation of the oscillations of rotary tablets of the aggregated equipment under load by vertical forces”.

The article suggests methods for determining the natural frequencies of oscillations of the index tables of aggregate machines obtained as a result of a numerical and analytical solution of the differential equations of motion of a division table as a continuous plate. The proposed theory thus allows you to find the spectrum of natural frequencies of vibration of the rotary table system. If the frequency of disturbing force coincides with one of the natural frequencies of vibrations, resonance occurs. For linear - elastic system in the formulation of linear elasticity theory forced oscillation amplitude bezkintsevo turn into big ones. At present it does not happen. All materials exist internal friction. Therefore resonances at higher harmonics are usually not terrible. For engineering details harmonics above the fifth – sixth shall not be considered. But the main tone resonance or first harmonic can be considered the cause of imminent failure.

**Key words:** vibrations; rotary table; cutting force; aggregate machine; frequency spectrum.

### 1. Актуальность

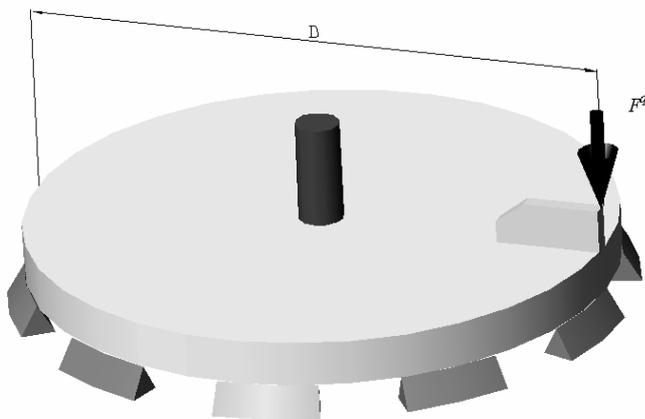
Предлагаются методы определения частот колебаний делительных столов агрегатных станков от действия вертикальных сил, полученные в результате численно – аналитического решения дифференциальных уравнений движения планшайбы делительного стола агрегатированного оборудования, как сплошной пластины.

### 2. Цель работы

Основная цель данной работы – решение задачи по предупреждению повышенных вибраций при работе делительных столов агрегатных станков путем определения аналитических значений собственных частот колебаний и соответствующего задания частот работы инструментов в процессе обработки.

### 3. Изложение основного материала

Сила резания для данного случая разложим на две составляющие. Нагружение планшайбы стола вертикальной составляющей показано на рис. 1. Для такого случая поперечная сила в точке с координатами  $r = r_0$  и  $\varphi = \varphi_0$   $Q = Q(t)$ .



**Рис. 1** – Схема действия вертикальной составляющей силы резания на планшайбу агрегатного станка

Причем значение поперечной силы определяется из выражения

$$Q = D \frac{\partial}{\partial r} (\nabla^2 w)$$

Переходя к производным, получим

$$Q = D \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 w}{r \partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right]$$

Раскрыв скобки, получим

$$Q = D \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} + \frac{\partial^2 w}{r \partial r^2} - \frac{\partial w}{r^2 \partial r} - \frac{2}{r^3} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right]$$

При определении функции

## Верстати та інструменти

поперечної сили представляємо прогиб сочетанием предложенных выше функций с неизвестными константами  $C_{ijk}^q$

$$w = \sum_i \sum_j \sum_k C_{ijk}^q \sin k\varphi \cdot \sin \frac{j\pi r}{R} \cdot \sin \omega_i t$$

Тогда можно определить производные, входящие в выражения для моментов

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial r} &= C_{ijk}^q \frac{j\pi}{R} \sin k\varphi \cdot \cos \frac{j\pi r}{R} \cdot \sin \omega_i t \\ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} &= -C_{ijk}^q \frac{j^2 \pi^2}{R^2} \sin k\varphi \cdot \sin \frac{j\pi r}{R} \cdot \sin \omega_i t \\ \frac{\partial w}{\partial \varphi} &= C_{ijk}^q \cdot k \cdot \cos k\varphi \cdot \sin \frac{j\pi r}{R} \cdot \sin \omega_i t \\ \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} &= -C_{ijk}^q \cdot k^2 \cdot \sin k\varphi \cdot \sin \frac{j\pi r}{R} \cdot \sin \omega_i t \\ \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} &= -C_{ijk}^q \cdot \frac{j^3 \pi^3}{R^3} \cdot \sin k\varphi \cdot \cos \frac{j\pi r}{R} \cdot \sin \omega_i t \end{aligned}$$

Поперечная сила, вызываемая инструментом, определяется выражением

$$Q = g(r_0, \varphi_0),$$

где  $r_0$  – радиальная координата приложения силы резания,  $\varphi_0$  – угловая координата приложения силы,  $\varphi_0 = \frac{2\pi n}{N}$ ,  $n$  – номер инструмента,  $N$  – количество позиций,  $t$  – время.

Считая силу резания, приложенной сосредоточенно, представляем ее в виде дельта – функции. Раскладывая ее в тригонометрический ряд, получаем выражение для изгибающего момента в виде

$$Q = F^q \cdot \sum_j \sum_k \cos k(\varphi - \varphi_0) \cdot \cos \frac{j\pi(r - r_0)}{R} \cdot f(t),$$

где  $F^q$  – номинальное значение силы резания,  $f(t)$  – функция времени, определяемая динамической нагрузкой со стороны режущего инструмента. Предполагая, что вращение инструмента происходит с постоянной угловой скоростью  $\Omega$ , вполне логично допустить, что  $f(t) = \sin \Omega t$ .

В указанных условиях уравнение для определения изгибающего момента переписывается в виде

$$\begin{aligned} -D \sum_i \sum_j \sum_k C_{ijk}^q \left\{ \begin{aligned} &\frac{j^3 \pi^3}{R^3} \sin k\varphi \cos \frac{j\pi r}{R} + \frac{j^2 \pi^2}{r \cdot R^2} \sin k\varphi \sin \frac{j\pi r}{R} + \\ &+ \frac{j\pi}{r^2 \cdot R} \sin k\varphi \cos \frac{j\pi r}{R} - \frac{2k^2}{r^3} \sin k\varphi \sin \frac{j\pi r}{R} \end{aligned} \right\} \sin \omega_i t = \\ = F^q \sum_j \sum_k \cos k(\varphi - \varphi_0) \cdot \cos \frac{j\pi(r - r_0)}{R} \cdot f(t) \end{aligned}$$

или обозначив громоздкие выражения под знаками сумм

$$-\frac{D}{R^3} \sum_i \sum_j \sum_k C_{ijk}^q \cdot Z_{jk}(\varphi, \rho) \cdot \sin \omega_i t = F^q \sum_j \sum_k \cos k(\varphi - \varphi_0) \cdot \cos \frac{j\pi(r - r_0)}{R} \cdot f(t)$$

где  $\rho = \frac{r}{R}$ .

Учитывая независимость функций, стоящих под знаком сумм, можно рассматривать каждое слагаемое по  $k$  и  $j$  отдельно. Имея ввиду разложение в ряд по членам, соответствующим разложению дельта – функции, применяем процедуру Бубнова – Галеркина. Тогда каждый коэффициент  $C_{ijk}^q$  можно определить из уравнения

$$-\frac{D}{R^3} \sum_i C_{ijk}^q \cdot B_{jk}^q \cdot \sin \omega_i t = F^q \cdot P_{kj} \cdot f(t), \quad (1)$$

в котором коэффициенты  $B_{jk}^q$  и  $P_{jk}$  определяются выражениями

$$B_{jk}^q = \int_0^{2\pi} \int_0^1 Z_{jk}(\varphi, \rho) \cdot \cos k(\varphi - \varphi_0) \cdot \cos j\pi(\rho - \rho_0) d\varphi d\rho,$$

$$P_{jk} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \cos^2 k(\varphi - \varphi_0) \cdot \cos^2 j\pi(\rho - \rho_0) d\varphi d\rho.$$

Интеграл для  $B_{jk}^q$  зависит от точки приложения возмущающей силы. Для случая шести, восьми и двенадцати позиций интеграл приведен в таблицах.

**Таблица 1** – Коэффициенты  $B_{jk}^q$  для  $\varphi_0=0$

$k \setminus j$	1	2	3	4	5
1	16.369	-11.988	2.703	-25.903	-56.243
2	-245.756	-118.591	4.867	-10.325	7.49
3	874.381	484.355	-26.819	120.192	148.31
4	-2124.124	-1201.188	68.887	-324.805	-429.1
5	4164.036	2359.013	-135.691	642.427	853.124

**Таблица 2** – Коэффициенты  $B_{jk}^q$  для  $\varphi_0=30^0$

$k \setminus j$	1	2	3	4	5
1	20.561	-37.286	-125.177	-171.579	-163.024
2	-308.704	-368.846	-225.398	-68.391	21.711
3	1098.346	1506.459	1241.944	796.144	429.882
4	-2668.201	-3735.977	-3190.094	-2151.487	-1243.763
5	5230.62	7337.084	6283.733	4255.392	2472.815

**Таблица 3** – Коэффициенты  $B_{jk}^q$  для  $\varphi_0=45^0$

$k \setminus j$	1	2	3	4	5
1	20.605	-36.133	-90.425	25.903	339.205
2	-309.361	-357.438	-162.822	10.325	-45.173
3	1100.684	1459.866	897.151	-120.192	-894.458
4	-2673.879	-3620.428	-2304.447	324.805	2587.903
5	5241.751	7110.158	4539.219	-642.427	-5145.196

## Верстати та інструменти

Таблиця 4 – Коэффициенты  $B_{jk}^q$  для  $\varphi_0=60^0$ 

$k \setminus j$	1	2	3	4	5
1	19.245	-25.298	-2.703	197.482	338.609
2	-288.936	-250.255	-4.867	78.715	-45.094
3	1028.011	1022.103	26.819	-916.336	-892.888
4	-2497.336	-2534.789	-68.887	2476.292	2583.36
5	4895.664	4978.071	135.691	-4897.819	-5136.164

Таблиця 5 – Коэффициенты  $B_{jk}^q$  для  $\varphi_0=90^0$ 

$k \setminus j$	1	2	3	4	5
1	12.771	11.988	125.177	-25.903	-423.464
2	-191.747	118.591	225.398	-10.325	56.395
3	682.221	-484.355	-1241.944	120.192	1116.645
4	-1657.312	1201.188	3190.094	-324.805	-3230.748
5	3248.919	-2359.013	-6283.733	642.427	6423.283

Таблиця 6 – Коэффициенты  $B_{jk}^q$  для  $\varphi_0=120^0$ 

$k \setminus j$	1	2	3	4	5
1	2.876	37.286	2.703	-171.579	394.853
2	-43.18	368.846	4.867	-68.391	-52.584
3	153.63	-1506.459	-26.819	796.144	-1041.198
4	-373.212	3735.977	68.887	-2151.487	3012.46
5	731.628	-7337.084	-135.691	4255.392	-5989.288

Таблиця 7 – Коэффициенты  $B_{jk}^q$  для  $\varphi_0=135^0$ 

$k \setminus j$	1	2	3	4	5
1	-2.544	36.133	-86.602	25.903	259.664
2	38.19	357.438	-155.938	10.325	-34.581
3	-135.878	-1459.866	859.224	-120.192	-684.716
4	330.086	3620.428	-2207.026	324.805	1981.065
5	-647.086	-7110.158	4347.322	-642.427	-3938.698

Таблиця 8 – Коэффициенты  $B_{jk}^q$  для  $\varphi_0=150^0$ 

$k \setminus j$	1	2	3	4	5
1	-7.79	25.298	-125.177	197.482	-260.44
2	116.957	250.255	-225.398	78.715	34.684
3	-416.126	-1022.103	1241.944	-916.336	686.763
4	1010.889	2534.789	-3190.094	2476.292	-1986.985
5	-1981.702	-4978.071	6283.733	-4897.819	3950.468

Таблиця 9 – Коэффициенты  $B_{jk}^q$  для  $\varphi_0=180^0$ 

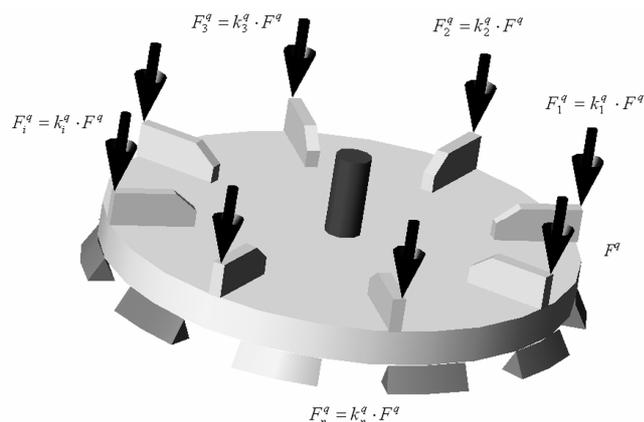
$k \setminus j$	1	2	3	4	5
1	-16.369	-11.988	-2.703	-25.903	56.243
2	245.756	-118.591	-4.867	-10.325	-7.49
3	-874.381	484.355	26.819	120.192	-148.31
4	2124.124	-1201.188	-68.887	-324.805	429.1
5	-4164.036	2359.013	135.691	642.427	-853.124

Для окончательного определения постоянных коэффициентов  $C_{ijk}^q$  представляем (1), как ряд по  $\sin \Omega t$ . Применим процедуру Бубнова – Галеркина в пределах полупериода вынужденных колебаний  $T = \frac{\pi}{\Omega}$ . Тогда для каждого  $j, k$  будем определять коэффициенты  $H_{i,1,2}, S_{i1}$ , как интегралы, указанные выше. Тогда неизвестные коэффициенты  $C_{ijk}^q$  будут определяться из системы уравнений

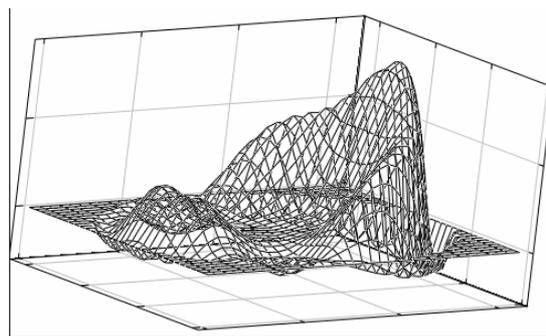
$$\left\{ \begin{array}{l} C_{1jk}^q \cdot H_{1,1} + C_{2jk}^q \cdot H_{1,2} + C_{3jk}^q \cdot H_{1,3} + \dots = -\frac{R^2 \cdot F^q \cdot P_{jk} \cdot S_1}{D \cdot Z_{jk}} \\ C_{1jk}^q \cdot H_{2,1} + C_{2jk}^q \cdot H_{2,2} + C_{3jk}^q \cdot H_{2,3} + \dots = -\frac{R^2 \cdot F \cdot h \cdot P_{jk} \cdot S_2}{D \cdot Z_{jk}} \\ C_{1jk}^q \cdot H_{3,1} + C_{2jk}^q \cdot H_{3,2} + C_{3jk}^q \cdot H_{3,3} + \dots = -\frac{R^2 \cdot F \cdot h \cdot P_{jk} \cdot S_3}{D \cdot Z_{jk}} \\ \dots \end{array} \right.$$

При нагружении стола несколькими силами одновременно схема будет иметь вид, представленный на рис. 2.

Амплитуда вынужденных колебаний в этом случае имеет вид, представленный на рис. 3.



**Рис. 2** – Схема нагружения стола несколькими силами одновременно



**Рис. 3** – Графическое распределение амплитуд колебаний планшайбы агрегатного станка

### Выводы

Предложенная теория, таким образом, позволяет найти спектр частот колебаний планшайбы поворотного-делительного стола агрегатного станка на стадии проектирования и упрощает задачу обеспечения точности агрегатного станка.

#### Список использованных источников:

1. Орликов М. Л. Динамика станков : учеб. / М. Л. Орликов. – 2-е изд., перераб. и доп. – К. : Вища школа, 1989. – 272 с.
2. Vancza J. Агрегатирование как ключ к интеграции производственного планирования и оперативного управления // *Annals CIRP* 2004. – Vol. 53, № 1. – P. 377-380.

#### References

1. Orlikov, M 1989, *Dinamika stankov*, Vyshcha shkola, Kyiv.
2. Vancza, J 2004, 'Агрегатирование как ключ к интеграции производственного планирования и оперативного управления', *Annals CIRP*, vol. 53, no. 1, pp. 377-380.

Стаття надійшла до редакції 7 червня 2017 р.