

УДК 621.87:681.5

**РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ КЕРУВАННЯ КРАНОМ ЗА ДОПОМОГОЮ МЕТОДУ  
ФУНКЦІЇ КЕРОВАНОСТІ**

©Григоров О. В., Окунь А. О. Лось Є. О.

*Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»*

**Інформація про авторів:**

**Григоров Отто Володимирович:** ORCID: 0000-0003-4332-4884; ottow@kpi.kharkov.ua; доктор технічних наук; завідувач кафедри підйомно-транспортних машин і обладнання; Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»; вул. Кирпичова, 2, м. Харків, 61002, Україна.

**Окунь Антон Олександрович:** ORCID: 0000-0002-6467-4229; okunanton@gmail.com; асистент кафедри підйомно-транспортних машин і обладнання; Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»; вул. Кирпичова, 2, м. Харків, 61002, Україна.

**Лось Євген Олександрович:** ORCID: 0000-0002-2565-0945; 2251741@gmail.com; аспірант кафедри підйомно-транспортних машин і обладнання; Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»; вул. Кирпичова, 2, м. Харків, 61002, Україна.

Продуктивність, надійність а також зручність експлуатації кранів багато в чому залежать від коливань підвішеного на гнучкому підвісі вантажу. Одним з важливих резервів підвищення ефективності роботи крана є оптимізація перехідних режимів руху вантажного візка (розгін/гальмування). У роботі розглядається модель руху «візок – вантаж» для мостового крана в задачі оптимального керування. Показано, що вихідна задача переміщення вантажу з деякої початкової точки в задану точку, в котрій система буде знаходитися в стані спокою, за кінцевий час та при наявності обмежень на керування, еквівалентна задачі локальної нуль-керованості для цієї системи. Представлено конструктивне рішення цієї задачі з використанням методу синтезу інерційних керувань – розвиток методу функції керованості. Досліджується задача побудови обмеженого керування, яке переводить систему з однієї заданої точки в іншу. Приводяться і обговорюються результати застосування у вигляді декількох різних алгоритмів розв'язання задачі за допомогою методу функції керованості, а також результати роботи програм, які реалізують ці алгоритми, і аналіз труднощів, що виникають, та шляхів їх вирішення.

**Ключові слова:** метод функції керованості; модель «візок – вантаж»; коливання вантажу; оптимальне керування; синтез інерційних керувань.

*Григоров О. В., Окунь А. А., Лось Е. А.* «Решение задачи управления краном с помощью метода функции управляемости».

Производительность, надёжность, а также удобство эксплуатации кранов во многом зависят от колебаний подвешенного на гибком подвесе груза. Одним из основных резервов повышения эффективности работы крана является оптимизация переходных режимов движения грузовой тележки (разгон/торможение). В работе рассматривается модель движения «тележка – груз» для мостового крана в задаче оптимального управления. Показано, что исходная задача перемещения груза из некоторой начальной точки в заданную точку, в которой система будет находиться в состоянии покоя, за конечное время и при

наличии ограниченный на управление, эквивалентна задаче локальной нуль-управляемости для этой системы. Представлено конструктивное решения этой задачи с использованием метода синтеза инерционных управлений – развитие метода функции управляемости. Исследуется задача построения ограниченного управления, которое переводит систему из одной заданной точки в другую. Приводятся и обсуждаются результаты применения в виде нескольких различных алгоритмов решения задачи с помощью метода функции управляемости, а также результаты работы программ, реализующих эти алгоритмы, и анализ возникающих трудностей и путей их разрешения.

**Ключевые слова:** метод функции управляемости; модель «тележка – груз»; колебания груза; оптимальное управление; синтез инерционных управлений.

**Grigorov O., Okun A., Los Ye.** “A solution of a problem of optimal crane control using the controllability function method”.

Productivity, reliability, as well as ease of crane operation largely depends on the vibrations of cargo suspended on a flexible rope. One of the main reserves to improve the crane efficiency is transient mode optimization of the trolley movement (acceleration/deceleration). A "trolley – cargo" movement model that represents operation of an overhead crane in tasks of optimal control are considered. It is shown that an initial task of cargo movement from a certain initial point to a given point, at which the system would be at the quiescent state by a finite time and with control constraints, is equivalent to a task of local zero-controllability for this system. A practical solution of this task is presented by using the inertial control synthesis method, that is evolution of the controllability function method. The task of receiving bounded control that transfers a system from one given point to another are studied. Results of application in the form of several different algorithms for solving the task using the controllability function method, as well as results of programs implementing these algorithms, and an analysis of emerging difficulties and ways of its overcoming are presented and discussed.

**Key words:** the controllability function method; “trolley – cargo” movement model; cargo oscillations; optimal control; the inertial control synthesis method.

### **1. Вступ та аналіз публікацій**

У роботі розглядається система «візок – вантаж», що описує рух мостового крана. Для цього вирішується наступна задача: необхідно перевезти вантаж з деякого початкового положення в кінцеве, у якому система буде перебувати в стані спокою, і зробити це за кінцевий час і при наявності обмежень на керування. Розглянута лінеаризована модель цієї системи, що являє собою лінійну систему диференціальних рівнянь четвертого порядку з одномірним керуванням [1]. Показано, що вихідна задача потрапляння еквівалентна задачі локальної нуль-керуваності для цієї системи. Для розв’язання цієї задачі застосовується метод функції керуваності, уперше запропонований В.І. Коробовим у 1979 році [1, 2]. У нашій роботі використовується розвиток цього методу – синтез інерційних керувань [4]. У роботі наведені необхідні відомості про цей метод.

## Піднімально-транспортні машини

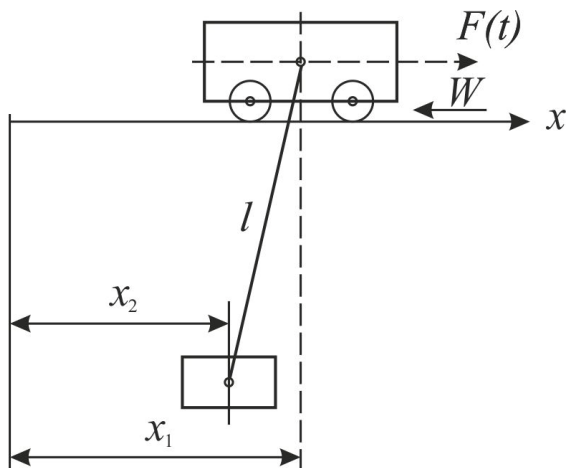
Наводяться й обговорюються кілька різних алгоритмів розв'язання задачі за допомогою методу функції керованості, а також результати роботи програм, що реалізують ці алгоритми, і аналіз виникаючих труднощів і шляхів їх усунення.

### 2. Постановка задачі

У математичній теорії керування важливу роль відіграють задачі керування рухом механічних систем. У нашій роботі ми розглядаємо приклад такої задачі, яка є не надмірно складною, що дозволяє пред'явити її аналітичне розв'язання, і початково виникає із практичної задачі. А саме, ми розглядаємо задачу керування для двомасової динамічної моделі крана у вигляді моделі «візок – вантаж», і системи диференціальних рівнянь із керуванням четвертого порядку, що її описує. Відзначимо, що ця система являє собою «суміш» двох добре відомих у теорії керування керованих двомірних лінійних систем, об'єднаних одним керуванням: системи, що описує рух візка уздовж горизонтальної рейки, і системи, що описує рух математичного маятника. Ці дві системи, зокрема, часто розглядаються як модельні для завдання лінійної швидкодії.

Модель «візок – вантаж» описує рух візка масою  $m_1$  і вантажу масою  $m_2$ , підвішеного на канаті довжиною  $l$ . На візок діють рушійна сила  $F(t)$  і сила статичного опору  $W$ . У моделі передбачається, що канат абсолютно гнучкий, невагомий й нерозтяжний, маса вантажу зосереджена в одній точці, коливання вантажу малі й відбуваються тільки в площині руху візка [1]. Модель руху наведена на рис. 1.

Необхідно перевезти вантаж з деякої початкової точки в задану наперед точку, при цьому швидкість вантажу в цій кінцевій точці повинна дорівнювати нулю.



**Рис. 1** – Двомасова модель «візок – вантаж»

Лінеаризовані рівняння руху описуваної системи будуть мати вигляд:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = F(t) - W \operatorname{sign} \dot{x}_1 - \frac{m_2 g}{l} (x_1 - x_2) \\ m_2 \ddot{x}_2 = \frac{m_2 g}{l} (x_1 - x_2) \end{cases} \quad (1)$$

У якості керування вибирають рушійну силу, оскільки вибір у якості керування швидкості або прискорення візка призведе до надмірного ускладнення керуючого механізму й нераціонального використання його

можливостей [1]. Лінеаризована система диференціальних рівнянь із керуванням першого порядку, що описує рух системи «візок - вантаж», записується так:

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + BU(t), \quad (2)$$

де

**Піднімально-транспортні машини**

$$1) A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{m_2 g}{m_1 l} & 0 & \frac{m_2 g}{m_1 l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & 0 & -\frac{g}{l} & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

2)  $m_1$  і  $m_2$  – маси візка й вантажу,

3)  $l$  – довжина підвісу,

4)  $g$  – гравітаційна стала,

5)  $y(t) = (y_1(t) y_2(t) y_3(t) y_4(t))^T$ ,

де

$y_1(t)$  і  $y_3(t)$  – координати візка й вантажу,

$y_2(t)$  і  $y_4(t)$  – швидкості візка й вантажу,

6)  $U(t) = \frac{F(t) - W \text{sign}(y_2(t))}{m_2}$ ,

де

$F(t)$  – рушійна сила,  $-K \leq F(t) \leq K$ , де  $K$  – максимально припустиме зусилля;

$W$  – величина опору руху коліс візка.

Невиродженою заміною  $z = Ly$ ,

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{l}{g} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{l}{g} \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

ця система відображається на систему

$$\dot{z}(t) = A_1 z(t) + B_1 U(t), \quad (3)$$

де

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{m_1 + m_2}{m_1 l} & 0 \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Надалі ми розглядаємо систему «візок – вантаж» саме в такому вигляді. Задача керування для системи «візок – вантаж» еквівалентна задачі нуль-керуваності для системи (3). Ця задача полягає в тому, що необхідно побудувати безперервне обмежене

**Піднімально-транспортні машини**

програмне керування  $u = u(t)$ , що переводить систему з довільної заданої початкової точки в нуль, причому час, за який це відбувається, повинен бути кінцевим.

**3. Розв'язання задачі локальної нуль-керованості**

Розглянемо задачу локальної нуль-керованості для повністю керованої системи

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t, x(t)), \quad x \in R^n, \quad u \in \Omega \subset R^r, \quad t \in [t_0, t_1], \quad (4)$$

де  $A \in R^{n \times n}$ ,  $b \in R^n$ , яка складається в знаходженні керування  $u(t)$ , що переводить довільну задану точку  $x_0 \in Q$  – деякої околиці нуля в нуль за якийсь час  $T$ , і задовольняє умовам:

1.  $u(t) \in \Omega, \forall t \in [t_0, t_1]$ .
2. траєкторія системи (4), що починається в точці  $x_0 \in Q$  в момент часу  $t_0$ , така, що  $x(t) \in Q, \forall t \in [t_0, t_1]$  і  $\lim_{t \rightarrow t_0+T} x(t) = 0$ .

Для розв'язання цієї задачі ми використовуємо метод функції керованості, запропонований В. І. Коробовим у 1979 р. [1, 2]. Сформулюємо основну теорему для випадку автономних керованих систем.

**Теорема 1** (Метод функції керованості для автономних систем)

Розглянемо рівняння  $\dot{x} = f(x, u)$ ,  $x \in R^n$ ,  $u \in R^r$ ,  $f(x, u)$  безперервне за сукупністю змінних і в кожній області

$$\{(x, u) : 0 < \rho_1 \leq \|x\| \leq \rho_2, u \in \Omega\}$$

задовольняє умові Ліпшиця з константою  $L_f(\rho_1, \rho_2)$ . Нехай у деякій області  $Q_1 = \{x : \|x\| < R\}$ ,  $R \in (0, \infty)$  існує функція  $\theta(x)$  – функція керованості, що задовольняє наступним умовам:

1.  $\theta(x) > 0$  при  $x \neq 0$  и  $\theta(0) = 0$ .
2.  $\theta(z) \in C^1(Q_1)$ , за винятком, можливо, точки  $x = 0$ .
3.  $\exists c > 0 : Q = \{x \in R^n : \theta(x) \leq c\}$  – обмежена, і  $Q_c \subset \text{int } Q_1$ .
4.  $\exists u = u(x) \in \Omega$ , и  $\forall x \in Q : \sum_{i=1}^n \frac{\partial \theta(x)}{\partial x_i} f_i(x, u(x)) \leq -\beta \theta^{1-\frac{1}{\alpha}}(x)$ ,  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ , причому в

кожному кільці

$$K(\rho_1, \rho_2) = \{(x, u) : 0 < \rho_1 \leq \|x\| \leq \rho_2 < R\}$$

воно задовольняє умові Ліпшиця з константою  $L_u(\rho_1, \rho_2)$ .

Тоді при

1.  $\alpha \leq \infty$  траєкторія  $x(t)$  системи  $\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ x(0) = x_0 \in Q_c \end{cases}$  належить  $Q$  і закінчується в

деякий кінцевий момент часу  $T(x_0) \leq \frac{\alpha}{\beta} \theta^{\frac{1}{\alpha}}$  в нулі, тобто  $\lim_{t \rightarrow T(x_0)} x(t) = 0$ .

2.  $\alpha = \infty$  за кінцевий час в  $\theta$  потрапити не можна.

Сформулюємо теорему, що дає розв'язання задачі синтезу інерційних керувань для системи (4).

**Теорема 2** (Про розв'язання задачі локальної нуль-керуваності системи  $\dot{x} = Ax + Bu$  при наявності обмежень на керування)

Розглянемо систему  $\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t)$ ,  $x \in R^n$ ,  $u \in \{u \in R : \|u^{(k)}(z)\| \leq d_k, k = \overline{0, l}, l \geq 1\}$ , для якої  $\text{rank}(b \ Ab \ A^2b \dots A^{n-1}b) = n$ , а також виконано:

1.  $\forall \bar{\theta}$  і числа  $\alpha \geq 2l + 1$  константа  $c$  визначається умовою:  $0 < c \leq \frac{\sigma \bar{\theta}}{\|F^{-1}(\bar{\theta})\| \cdot \|F(\bar{\theta})\|}$ , де  $\sigma \in (0, 1)$ ,

$$F^{-1}(\theta) = \int_0^{\frac{1}{\alpha\theta^\alpha}} \left(1 - \frac{t}{\alpha\theta^\alpha}\right)^\alpha e^{-A_0 t} b_0 b_0^* e^{-A_0^* t} dt.$$

2.  $0 < a_0 \leq \frac{1}{2} \|F^{-1}\| \min_{0 \leq k \leq l} \frac{d_k^2}{\eta_k^2 c^{\frac{2k+1}{\alpha}}}$ .

3.  $\theta(Lx)$  при  $x \neq 0$  є єдиним позитивним розв'язанням рівняння  $2a_0\theta = (F(\theta)Lx, Lx)$ ;

$$\theta(0) = 0, \text{ де } L = \begin{pmatrix} \hat{c}^* \\ (A^* \hat{c})^* \\ \dots \\ ((A^*)^{n-1} \hat{c})^* \end{pmatrix}.$$

4.  $Q = \{x \in R^n : \theta(Lx) \leq c\}$ .

Тоді керування  $\tilde{u}(t) = b_0^* \left( \frac{1}{2} F(\theta(Lx)) \cdot z(t) + LA \right)$ , переводить будь-яку задану точку

$x_0 \in Q$  в початок координат за час  $T(x_0) \leq \alpha \theta(x_0, x_0)^{\frac{1}{\alpha}}$  і задовольняє обмеженням  $\|u^{(k)}(z)\| \leq d_k, k = \overline{0, l}, z \in Q \setminus 0, \forall t \in [0, T(x_0)]$ .

**Доказ.** У силу [3], рівняння  $2a_0\theta - (F(\theta)Lx, Lx)$  визначає єдине позитивне розв'язання, безперервно диференційоване в  $Q_1 \setminus 0 = \left\{ x \in R^n : \|x\| \leq \frac{R}{\|L\|} \right\} \setminus 0$ , за умови що  $\theta(0) = 0$  є безперервною функцією при  $x = 0$ .

У силу [3],  $\forall \bar{\theta} > 0 \exists c > 0, c \leq \frac{\delta^2 \sigma \bar{\theta}}{\|F(\bar{\theta})\| \cdot \|F^{-1}(\bar{\theta})\|}$ , таке, що  $Q \subset \text{int} Q_1$ ; керування  $\tilde{u}(x)$  в кожному кільці  $K(\rho_1, \rho_2)$  задовольняє умові Ліпшиця зі сталою  $L_u(e, \rho_2) \xrightarrow{e \rightarrow +0} +\infty$ ;  $\dot{\theta}(x) = -\theta^{1-\frac{1}{\alpha}}(x)$ ;  $\|\tilde{u}^{(k)}(x)\| \leq d_k, k = \overline{0, l}, x \in Q \setminus 0$ .

**Піднімально-транспортні машини**

Тоді з теореми 1 ми одержуємо, що для будь-якого  $x_0 \in Q$  керування  $\tilde{u}$  переводить  $x_0$  в 0 за траєкторією  $x(t)$  системи  $\dot{x} = Ax + b\tilde{u}$  за час  $T(x) = \alpha\theta^{\frac{1}{\alpha}}$ .

**4. Алгоритм побудови керування**

Теорема 2 має найпростіший вигляд при  $\alpha = 1$ . У цьому випадку функція керування  $\theta(t, x)$  є часом руху системи:  $\theta(t, x) = \theta_0 - t$ . Алгоритм, що реалізує побудову шуканого рівняння, що переводить систему (3) з деякої початкової точки  $x_0$  в нуль, складається з наступних кроків:

**Алгоритм 1**

*Випадок, коли функція керованості – це час руху:*

1. Побудувати матрицю

$$F^{-1}(\theta) = \int_0^{\theta} \left(1 - \frac{t}{\theta}\right) e^{-A_1 t} B_1 B_1^T e^{-A_1^T t} dt.$$

2. Розв'язати рівняння

$$2a_0\theta = (F(\theta)z_0, z_0)$$

відносно  $\theta$  й одержати корінь  $\theta_0$ .

3. Побудувати керування

$$u(t, z) = -\frac{1}{2} B_1^T F(\theta_0 - t) z.$$

4. Розв'язати задачу Коші

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = A_1 z(t) + B_1 u(t) \\ z(0) = z_0, t \in [0, \theta_0] \end{cases}$$

і одержати її розв'язання  $z(t)$ .

Однак, оскільки при  $\alpha = 1$  не накладається ніяких обмежень на похідну керування, то, в силу похибок обчислення, може виявитися, що керування погано поводить себе при  $t$  близьких до  $\theta_0$ : воно може бути більшим по модулю й часто змінювати знак. Щоб трохи згладити ці ефекти, можна використовувати наступну модифікацію методу: розв'язувати на кроці 2 рівняння  $2a_0\theta^\alpha = (F(\theta)z_0, z_0)$  при натуральному  $\alpha > 1$ .

Для побудови ж інерційних керувань можна використовувати наступний алгоритм при  $\alpha > 2l + 1$ , де  $l$  – максимальний порядок похідної керування, на яку накладаються обмеження:

**Алгоритм 2**

*Побудова інерційних керувань:*

1. Побудувати матрицю

$$F^{-1}(\theta) = \int_0^{\frac{1}{\alpha\theta^\alpha}} \left(1 - \frac{t}{\frac{1}{\alpha\theta^\alpha}}\right) e^{-A_0 t} b_0 b_0^* e^{-A_0^T t} dt.$$

*2. Розв'язати рівняння*

$$2a_0\theta^\alpha = (F(\theta)z_0, z_0)$$

відносно  $\theta$  й одержати корінь  $\theta_0$ .

*3. Побудувати керування*

$$u(t, z) = -\frac{1}{2} B_1^T F(\theta) z.$$

*4. Розв'язати задачу Коші*

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = A_1 z(t) + B_1 u(t) \\ \dot{\theta} = \theta^{1-\frac{1}{\alpha}} \\ z(0) = z_0, t \in [0, \theta_0] \\ \theta(0) = \theta_0 \end{cases}$$

і підставити отримані  $z(t)$  й  $\theta(t)$  у вираз для керування.

Слід зазначити, що на практиці може виявитися, що початкова точка системи, з якої потрібно потрапити в нуль, не належить області можливості розв'язання задачі  $Q$ . Для того, щоб переводити такі точки в нуль, можна використовувати наступний алгоритм:

**Алгоритм 3**

*У випадку початкових даних, далеких від нуля:*

1. На першій ділянці часу, від  $0$  до  $t_1$  покласти керування  $u(t) = -d_1$ .

2. Коли в момент  $t_1$  візок набере достатню швидкість, яку можна задати заздалегідь, наприклад,  $x_2(t) = \bar{c}$ , покласти керування рівним нулю до моменту часу  $t_2$ .

3. Коли в момент часу  $t_2$  система потрапить в область можливості розв'язання задачі, використовувати алгоритм 1 або 2.

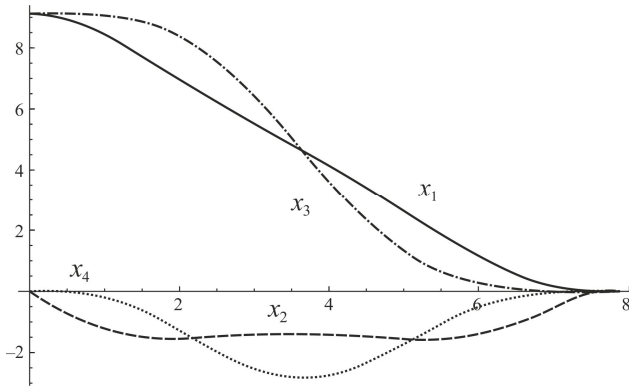
**5. Реалізація й результати**

Ми реалізували алгоритми, описані вище, створивши програми в пакеті символьних обчислень «Mathematica». При реалізації алгоритму 1 проблеми виникають на 3-ому і 4-ому кроці. Це пов'язане з тим, що матриця  $F^{-1}(\theta)$  є недостатньо обумовленою, коли параметр  $\theta$  малий. Для того, щоб отримати матрицю  $F^{-1}(\theta)$  з достатньою точністю, ми використовували розкладання цієї матриці в ряд Тейлора, замінюючи її сумою достатньої кількості доданків ряду Тейлора. Труднощі на четвертому кроці алгоритму полягають у тому, що отримане керування може бути не обмеженим заданою константою, коли  $t$  близький до  $\theta_0$ , а також часто змінює знак. Ці його особливості можна трохи згладити, якщо використовувати модифікацію алгоритму 1. Як приклади роботи програм розглянемо систему, де  $m_2 = \frac{1}{2} m_1$  й  $l = g$ , і початкову точку  $y_0 = (9090)^T$ .

У результаті роботи алгоритму 1, показаної на рис. 2 і 3, ми одержуємо час руху  $\theta_0 = 7,849$  с.

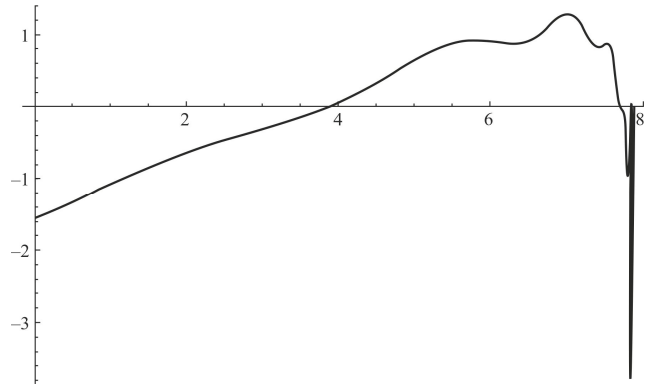


**Піднімально-транспортні машини**



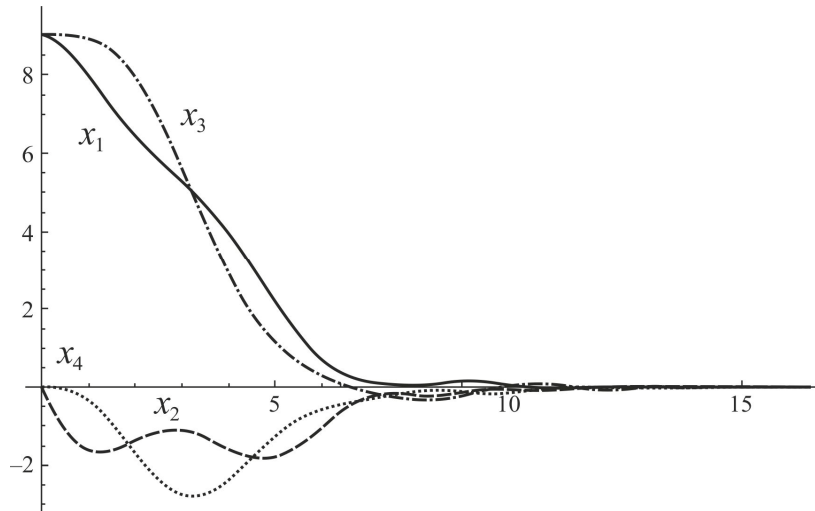
**Рис. 2** – Графік компонентів траєкторії системи:

$x_1, x_3$  – координати візка і вантажу, м;  $x_2, x_4$  – швидкості візка і вантажу, м/с



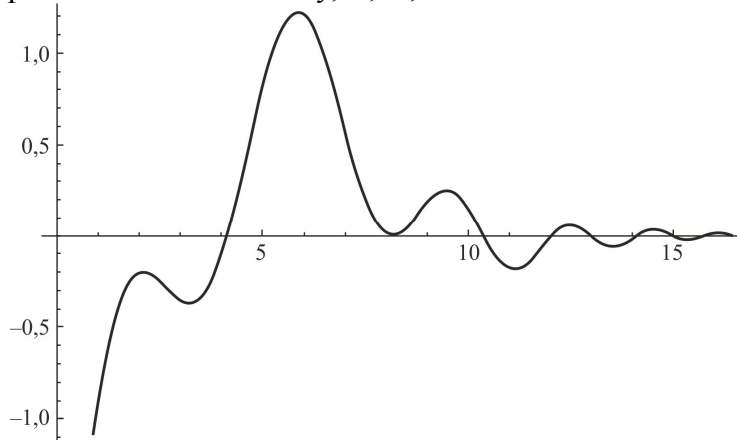
**Рис. 3** – Графік керування  $u(t)$

У результаті роботи модифікації алгоритму 1 при  $\alpha=3$  ми одержуємо час руху 16,415 с. Траєкторія й керування показані на рис. 4 і 5.



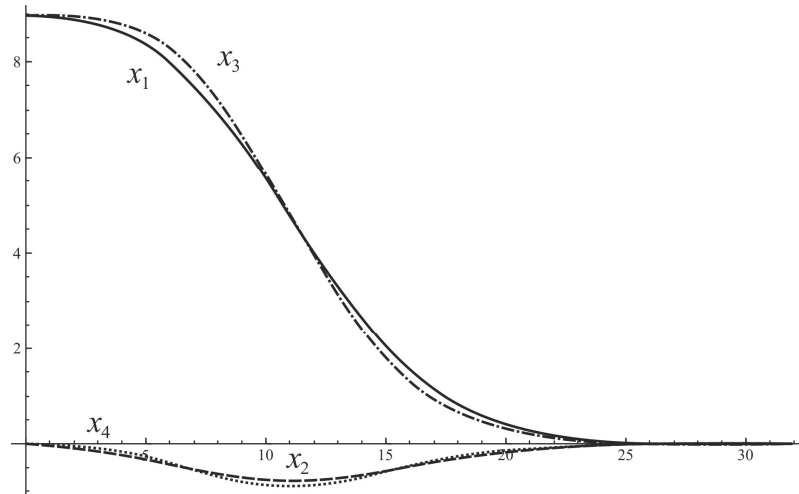
**Рис. 4** – Графік компонентів траєкторії системи:

$x_1, x_3$  – координати візка і вантажу, м;  $x_2, x_4$  – швидкості візка і вантажу, м/с

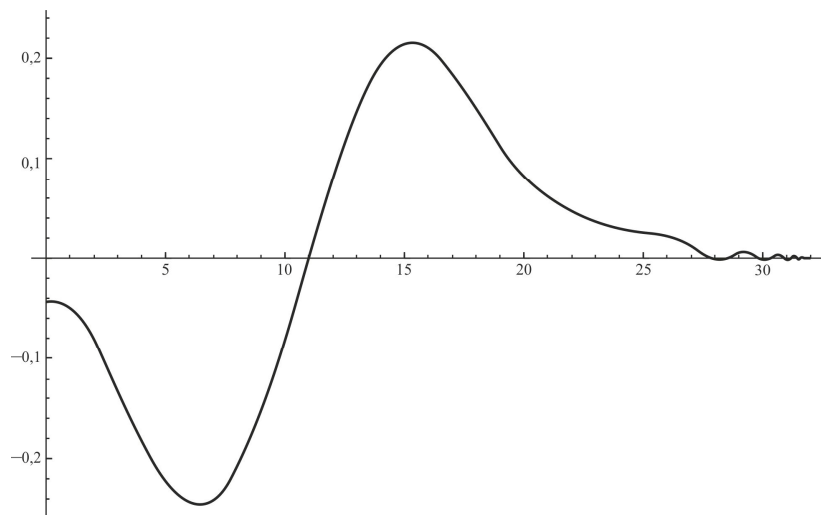


**Рис. 5** – Графік керування  $u(t)$

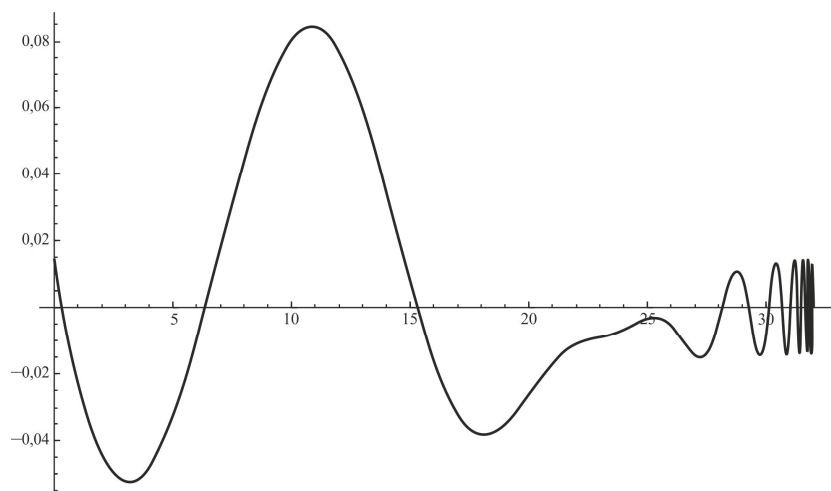
У результаті роботи алгоритму 2, показаній на рис. 6, 7 і 9, при  $\alpha=3, d_1=1$  і  $d_2=5$  ми одержуємо час руху, який дорівнює 31,891 с.



**Рис. 6** – Графік компонентів траєкторії системи:  
 $x_1, x_3$  – координати візка і вантажу, м;  $x_2, x_4$  – швидкості візка і вантажу, м/с

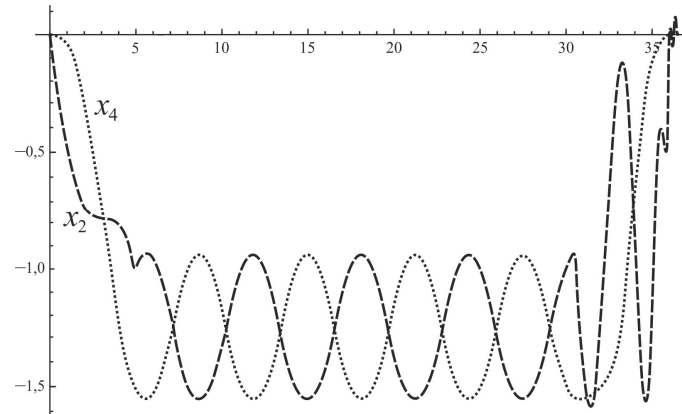
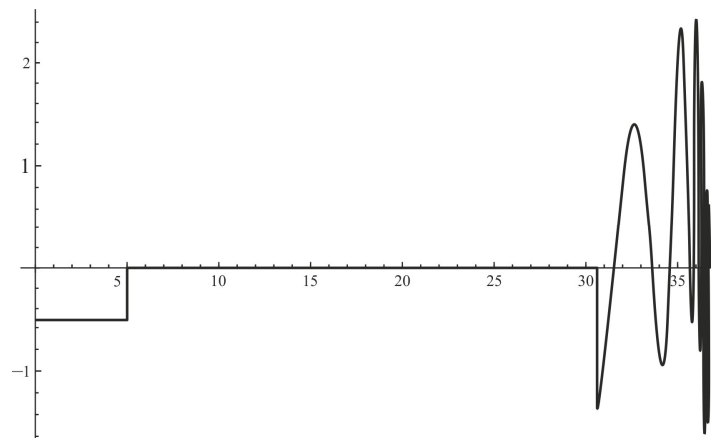


**Рис. 7** – Графік керування  $u(t)$



**Рис. 8** – Графік похідної керування  $u'(t)$

Ми застосували алгоритм 3 для системи  $m_1 = m_2$  й  $l = 2 * g$  і початкової точки  $y_0 = (50 \ 0 \ 50 \ 0)^T$ . Отриманий час руху дорівнює 45,1884 с, а графіки швидкостей візка й вантажу, а також керування, показані на рис. 9 і 10.

**Піднімально-транспортні машини****Рис. 9** – Графік швидкостей візка  $x_2$  й вантажу  $x_4$ , м/с**Рис. 10** – Графік керування  $u(t)$ **Висновки**

У роботі розглянуто задачу керованості з обмеженнями на керування для системи «візок – вантаж», що описує рух мостового крана. Дано конструктивне розв’язання цього завдання із застосуванням методу функції керованості. У системі «Mathematica» написана програма, що розв’язує задачу побудови керування у випадку, коли функція керованості є часом руху системи, а також програма для побудови інерційного керування. Також розроблена програма для розв’язання задачі у випадку, коли початкові дані не потрапляють в область можливості розв’язання задачі.

**Список використаних джерел:**

1. Коробов В. И. Метод функции управляемости / В. И. Коробов. – Москва ; Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2007. – 576 с.
2. Коробов В.И. Общий подход к решению задачи синтеза ограниченных управлений в задаче управляемости / В. И. Коробов // Математический сборник. – 1979. – 109 (151) : 4 (8). – С. 582–606.
3. Коробов В.И. Позиционный синтез ограниченных инерционных управлений для систем с одномерным управлением / В.И. Коробов, В.А. Скорик // Дифференциальные уравнения. – 2002. – т.38. – № 3. – С. 319–331.
4. Григоров О.В. Оптимальне керування рухом механізмів вантажопідіймних машин : навч. посіб. / О. В. Григоров, В. С. Ловейкін. – К. : ІЗМН, 1997. – 264 с.

**References**

1. Korobov, V 2007, *Metod funktsii upravlyaemosti*,: NITs “Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika”, Moskva, Izhevsk.
2. Korobov, V 1979, ‘Obshchiy podkhod k resheniyu zadachi sinteza ogranichennykh upravleniy v zadache upravlyaemosti’, *Matematicheskiy sbornik*, no. 109 (151): 4 (8), pp. 582–606.
3. Korobov, V & Skorik, V 2002, ‘Pozitsionnyy sintez ogranichennykh inertsionnykh upravleniy dlya sistem s odnomernym upravleniyem’, *Differentsialnyye uravneniya*, vol. 38, no. 3, pp. 319–331.
4. Grigorov, O & Loveikin, V 1997, *Optymalne keruvannia rukhom mekhanizmiv vantazhopididomnykh mashyn*, IZMN, Kyiv.

Стаття надійшла до редакції 10 березня 2017 р.