

УДК 531.01:517.2

**МЕТОД РОЗРАХУНКУ ДИНАМІЧНОГО ПОЛЯ ПОЗДОВЖНІХ КОЛИВАНЬ
В СОСУДАХ ВЕРТИКАЛЬНИХ ПІДЙОМНИХ МЕХАНІЗМІВ**©Зеленська Т. С.¹, Даниліна Г. В.²*Дніпропетровський національний університет ім. О. Гончара¹**Криворізький коледж Національного авіаційного університету²***Інформація про авторів:**

Зеленська Тетяна Сергіївна: ORCID: 0000-0001-8434-5329; tanyazese@yandex.ru; аспірант кафедри диференціальних рівнянь; Дніпропетровський національний університет ім. О. Гончара; пр. Гагаріна, 72, м. Дніпропетровськ, 49010, Україна.

Даниліна Галина Володимирівна: ORCID: 0000-0003-3477-0508; danilina1415@yandex.ru; кандидат технічних наук; доцент циклової комісії фундаментальних дисциплін; Криворізький коледж Національного авіаційного університету; вул. Туполева, 1, м. Кривий Ріг, Дніпропетровська обл., 50045, Україна.

Розглянуто початково-крайову задачу математичної фізики про рух поздовжніх хвиль в канаті змінної довжини для телеграфного та хвильового рівнянь. Метою роботи є отримання рівняння стану каната, як на барабані, так і поза ним, враховуючи інерційні навантаження на нижньому кінці сталюого каната та вплив тертя на шківі вертикальних підйомників.

Застосування модифікованого методу продовження дає змогу аналітично визначити вплив залишкових та відбитих хвиль від рухомого кінця канату на напруження в цілому, та побудувати більш коректну математичну модель розповсюдження поздовжніх хвиль в канатах змінної довжини.

Розв'язок крайових задач, що враховує математично точно зміну границі області інтегрування рівняння динамічного стану канатів, дозволить отримати максимально близький результат до реальних показників динамічного поля напружень в канатах, і відповідно зробити більш точний розрахунок параметрів запасу міцності підйомної установки.

Ключові слова: динамічні процеси; хвильове рівняння; інерційне навантаження.

Зеленская Т. С., Данилина Г. В. «Метод расчета динамического поля продольных колебаний в сосудах вертикальных подъемных механизмов».

Рассмотрена начально-краевая задача математической физики о движении продольных волн в канате переменной длины для телеграфного и волнового уравнений. Целью работы является получение уравнения состояния каната, как на барабане, так и вне его, учитывая инерционные нагрузки на нижнем конце стального каната и влияние трения на шкиве вертикальных подъемников.

Применение модифицированного метода продолжения позволяет аналитически определить влияние остаточных и отраженных волн от движущегося конца каната на напряжение в целом, и построить более корректную математическую модель распространения продольных волн в канатах переменной длины.

Решение краевых задач, учитывающий математически точно изменение границы области интегрирования уравнения динамического состояния канатов, позволит получить максимально близкий результат к реальным показателям динамического поля напряжений в канатах, и соответственно сделать более точный расчет параметров запаса прочности подъемной установки.

Ключевые слова: динамические процессы; волновое уравнение; инерционные нагрузки.

Zelenskaya T., Danilina G. “The calculation method of the dynamic field of longitudinal vibrations in the vessels of the vertical hoist”.

We consider the initial boundary value problem of mathematical physics of the motion of the longitudinal waves in the rope of variable length for the telegraph and the wave equation. The aim is to obtain the equation of state of war, as a drum, and out of it, given the inertial loads on the lower end of the wire rope and the effect of friction on the pulley vertical lifts.

Application of the modified continuation method allows analytically determine the effect of residual and reflected waves from the moving end of the rope to pull a whole, and to build a more correct mathematical model of the propagation of longitudinal waves in the ropes of variable length.

Solution of boundary value problems, taking into account the change of mathematical precision of the boundary of integration of the dynamic state of the ropes, will yield results as close to the real performance of the dynamic stress field in the ropes, and thus make a more precise calculation of the parameters of safety of the elevator installation.

Keywords: dynamic processes; wave equation; the inertial loads.

1. Постановка проблеми та аналіз публікацій

Серед установок, від яких залежить надійність, безпека і ефективність роботи гірничого підприємства, одне з головних місць належить стаціонарним машинам та установкам. Вони характеризуються складністю конструкцій і великою енергоємністю (на їх частку припадає до 70% всієї споживаної на гірничому підприємстві енергії) і представляють собою комплекси енергомеханічного обладнання, призначеного для підйому корисних копалин і пустих порід на поверхню, підйому і спуску людей, матеріалів, устаткування.

Під час руху каната виникають поздовжні коливання. Коливання каната, викликані гальмуванням, накладаються на перші, що сприяє збільшенню граничних значень зусиль. Якщо динамічні зусилля, що виникають від поздовжніх коливань, накладаються на зусилля від гальмування, може статися "підстрибування вантажу". Для розрахунку та прогнозування таких моментів, потрібно точно вирахувати максимально можливі амплітуди стрибків напружень в канаті, за весь цикл роботи шахтної установки. Це можливо, лише при врахуванні впливу залишкових та відбитих хвиль від рухомої верхньої границі в точці дотику каната зі шківом намотки. Практика експлуатації вантажопідйомних машин з врівноваженими канатами показує, що динамічні процеси в гнучких тягових органах під час їх роботи, в ряді випадків мають нестійкий характер; амплітуди поздовжніх коливань та напружень в канатах з прикріпленим на нижньому кінці вантажем зростають до небезпечних для практичної експлуатації показників [1, 2]. Однак загальною характерною рисою цих робіт є той факт, що в них розглядалися переважно канати постійної довжини, а фактична зміна довжини канату враховувалась тільки опосередковано. Ці обставини суттєво змінюють характер відображень хвиль від рухомого кінця, з'являються не тільки відображені хвилі, а й залишкові, і таким чином змінюється розподіл динамічних напружень в досліджуваному середовищі.

Задача про динамічні зусилля в силу складності і неможливості теоретичного визначення напруженого стану в канаті при аналітичному дослідженні питання про

виникнення в ньому динамічних зусиль, замінюється в деякому відношенні фізично еквівалентною, більш простою математичною моделлю. Для розрахунку шахтних підйомних канатів широким розповсюдженням користується так званий статичний метод розрахунку. Цей метод полягає в тому, що канат розраховується на простий розтяг як однорідний стержень, що підлягає впливу тільки власної ваги та ваги кінцевого вантажу. Щоб врахувати вплив інших сил, приймають підвищений запас міцності. Передбачається, що цей запас міцності покриває всі зусилля, які розвиваються в канаті, як статичні, так і динамічні. Такий недолік в розрахунках, можна усунути, застосовуючи модифікований метод продовження, який буде враховувати вплив коливальних процесів на динамічні зусилля, а отже і запаси міцності вираховуються більш оптимально, і не потребують значних енергозатрат та надлишкового укріплення конструкції.

2. Моделювання крайової задачі та метод розв'язання задачі

Розглядається одна з крайових задач математичної фізики про рух пружних хвильових переміщень в сталевому канаті змінної довжини під дією інерційних навантажень, прикладених до його нижнього кінця та з врахуванням сил тертя на шківі намотування. Основною задачею є отримання рівняння стану каната як на барабані, так і на ділянці висячого канату, у вигляді скінченної суми рядів відображених та залишкових хвиль.

Поздовжні переміщення підйомного канату розраховуємо за статичним та динамічним напруженнями. Дію навантажень приймаємо по правилам безпеки запасів міцності каната (рис. 1).

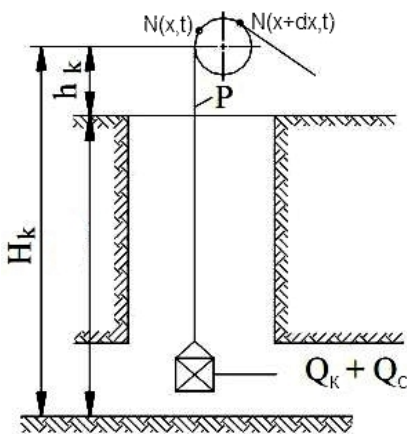


Рис. 1 – Розрахунок підйомного каната для вертикальної шахти

де Q_k, Q_c – маса відповідно корисного та стаціонарного вантажу, що піднімається за один раз, кг; m – маса загального вантажу, який піднімається за один робочий цикл; p – маса одного погонного метра підйомного каната, кг; l – загальна довжина сталевго канату; H_k – відстань від нижньої прийомної площадки до вісі верхньої копрового шківя, м; k – запас міцності підйомного каната; S_k – площа поперечного перерізу проволочного каната, σ_g – розрахункова граничнодопустима міцність проволочки каната при розтягу; кг/см.

Напруження в вигині точки дотику зі шківом намотування нескінченно мале в порівнянні з розтягуючим напруженням. Канат намотується на барабан радіусом R . Початок вісі x

Статичне напруження підйомного канату складається з ваги кліті з навантаженою вагонеткою та масою каната, довжиною від копрового шківя до підйомного сосуду, що знаходиться на прийомній площадці нижнього горизонту.

Статичне навантаження на підйомний канат в верхньому перерізі біля копрового шківя дорівнює:

$$Q_k + Q_c + pH_k = \frac{\sigma_g}{k} \cdot S_k,$$

або

$$m + p(l + h_k) = \frac{\sigma_g}{k} \cdot S_k,$$

Динаміка та міцність машин

розташуємо в точці кріплення каната на барабані та вісь x направимо вздовж поздовжньої вісі каната на зустріч вантажу, який підіймається даним канатом. Додатній напрямок пружних переміщень в канаті, позначимо $u(x, t)$. На канат, який знаходиться на шківі діє сила тертя

$$\Phi(x, t) = \lambda \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} dx,$$

де λ – коефіцієнт тертя для каната в цілому. Тоді, буде справедливо рівність

$$N(x + dx) - \Phi(x, t) - N(x, t) = \rho(S_{k1} + S_{k2} + S_{k3} + \dots + S_{kn}) \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} dx,$$

або

$$N(x + dx) - \Phi(x, t) - N(x, t) = \rho S \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} dx,$$

де S – сума всіх поперечних перерізів сталевих проволоку каната; ρ – лінійна густина каната.

$$N(x + dx, t) - N(x, t) = N_x(x + \alpha dx) dx,$$

де $0 < \alpha < 1$. Відносно видовження каната ε при пружних деформаціях визначаємо як диференціал функції $u(x, t)$ по x , тоді зусилля в канаті буде представлено такими рівностями:

$$N(x, t) = ES\varepsilon = ES \frac{\partial u(x, t)}{\partial x},$$

де E – модуль пружності каната першого роду. Тоді

$$ES \frac{\partial^2 u(x + \alpha dx, t)}{\partial x^2} - \lambda \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} dx + u(x, t) = \rho S \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} dx.$$

Спрощуючи останній вираз, отримаємо

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\lambda}{ES} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + u(x, t) = 0,$$

де $a^2 = \frac{E}{\rho}$.

Останнє рівняння є телеграфним рівнянням, яке у загальному вигляді записується так

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + A \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + B \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + Cu(x, t) = 0, \quad (1)$$

де $A = -\frac{\lambda}{ES}$, $B = 0$, $C = 1$, a – швидкість намотування каната на барабан.

Позначивши точку $x + dx = x_n$, запишемо початкові та крайові умови для ділянки каната, який лежить на шківі намотування, і на який діє сила тертя:

$$u(x, t_n) = 0, \quad u_t(x, t_n) = 0; \quad (2)$$

$$u_x(x_n, t) = \eta(t - t_n). \quad (3)$$

Побудуємо продовження функції $\eta(t)$ на всю вісь t :

$$M(t - t_n) = \begin{cases} \eta(t - t_n), & t > t_n \\ 0, & t < t_n. \end{cases}$$

Розв'язання крайової задачі (1-3) для телеграфного рівняння модифікованим методом продовження подано у [3, 4], тому остаточний розв'язок буде мати форму

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = e^{-\frac{B}{2}(x-x_n)} \left[e^{\frac{Aa(x-x_n)}{2}} M\left(t-t_n - \frac{x-x_n}{a}\right) + \int_0^{t-t_n - \frac{x-x_n}{a}} \left[\frac{Aa^2}{2} J_0(z) + Ca^2 \frac{t-t_n-\eta}{z} J_1(z) \right] e^{\frac{Aa^2}{2}(t-t_n-\eta)} M(\eta) d\eta \right],$$

де $z = \sqrt{(x-x_n)^2 - a^2((t-t_n)-\eta)^2}$; $J_0(z), J_1(z)$ – функції Бесселя, відповідно нульового та першого порядку.

Спростуючи останній вираз, отримаємо:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = e^{\frac{Aa(x-x_n)}{2}} M\left(t-t_n - \frac{x-x_n}{a}\right) + \int_0^{t-t_n - \frac{x-x_n}{a}} \left[\frac{Aa^2}{2} J_0(z) + a^2 \frac{t-t_n-\eta}{z} J_1(z) \right] e^{\frac{Aa^2}{2}(t-t_n-\eta)} M(\eta) d\eta.$$

В роботах [3, 4] було представлено розв'язання початково-крайової задачі для точки дотику каната зі шківом намотки. Розглянемо початково-крайову задачу для хвильового рівняння для каната змінної довжини під дією інерційних навантажень, прикладених до нижнього кінця цього каната. В області $\varphi(t) < x < l, t > 0$ знайти розв'язок хвильового рівняння

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0, \quad (4)$$

де, $x = \varphi(t)$ – закон, за яким змінюється довжина каната в наслідок переміщення його верхнього кінця.

Рівняння (4) та вихідна задача повинні задовольняти наступним початковим та крайовим умовам

$$u(x,0) = 0; \quad u_t(x,0) = 0, \quad 0 < x < l; \quad (5)$$

$$u(\varphi(t),t) = 0, \quad u_x(l,t) = \psi(t), \quad t > 0. \quad (6)$$

Функція $\varphi(t)$ описує переміщення верхнього кінця стержня, і в початковий момент її значення дорівнює 0; функція $\psi(x)$ описує інерційні навантаження, які прикладені до кінцевого вантажу.

Так, як в постановці початково-крайової задачі (4-6), в канаті рухається верхній кінець, а у відносній системі координат нижній знаходиться у стані спокою, то розв'язок відшукується за формою $u(x,t) = \chi(x+at)$.

Вводимо продовження функції $\psi(t)$ на всю вісь t :

$$H(t) = \begin{cases} \psi(t), & t > 0; \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Динаміка та міцність машин

Тоді, враховуючи другу крайову умову (6), вводячи заміну $\varpi = l + at$, $t = \frac{\xi - l}{a}$, отримуємо рівність

$$\chi(\varpi) = \int_{\varpi_0}^{\varpi} \text{H}\left(\frac{\xi - l}{a}\right) d\xi + \chi(\varpi_0),$$

або

$$u(x, t) = \int_l^{x+at} \text{H}\left(\frac{\xi - l}{a}\right) d\xi + \chi(l).$$

Отже, на інтервалі часу, що визначається подвійною нерівністю $\varphi(t) < at < l$, розв'язком задачі буде функція

$$u(x, t) = \int_l^{x+at} \text{H}\left(\frac{\xi - l}{a}\right) d\xi. \quad (7)$$

На інтервалі часу $0 < \frac{l - \varphi(t)}{a}$ функція (7) не буде задовольняти першій крайовій умові (6), і тому виникає необхідність побудови хвилі, відображеної від рухомого верхнього кінця сталевих канату. Для цього застосовуємо, вже викладений у [3, 4] модифікований метод продовження, і продовжуємо побудову хвиль до отримання остаточного розв'язку поставленої крайової задачі, який повністю задовольняє рівняння (4), початкові та крайові умови (5, 6).

Отже, для довільного моменту часу $t > 0$ розв'язок початково-крайової задачі (4-6) при переміщенні верхнього кінця зі швидкістю a буде представлено у вигляді

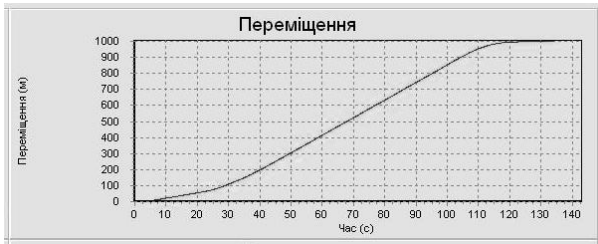
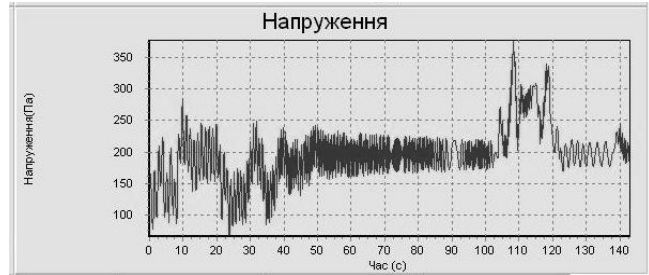
$$u(x, t) = \int_l^{x+at} \text{H}\left(\frac{\xi - l}{a}\right) d\xi - \int_l^{\varphi(T_0(x-at)) + aT_0(x-at)} \text{H}\left(\frac{\xi - l}{a}\right) d\xi + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \int_l^{\varphi(T_0(\tau(\tau(\dots(\tau(x-at)))))) + aT_0(\tau(\tau(\dots(\tau(x-at))))))} \text{H}\left(\frac{\xi - t}{a}\right) d\xi, \quad (8)$$

де

$$T_0(\varpi) = \begin{cases} t_0(\varpi), & \varpi < 0, \\ 0, & \varpi = 0, \\ < 0, & \varpi > 0; \end{cases}$$

$\tau(y) = 2l - (\varphi(T_0(y)) + aT_0(y))$; $n = 1, 2, \dots$ – кількість відбитих хвиль від рухомого кінця за весь повний цикл підняття вантажу.

Розглядаються коливання вертикальної гілки каната з вільно підвішеним вантажем на кінці. Отримані результати для функції переміщень для телеграфного і хвильового рівняння (8) дають змогу побудувати криву зміни в часі точки нижнього кінця кріплення вантажу (рис. 2). А також дослідити зміну амплітуди напружень в канаті за весь цикл роботи підйомної установки і встановити максимальні значення відхилень динамічних напружень, що дасть змогу спрогнозувати можливі періоди ймовірного розриву канату (рис. 3).

**Рис. 2****Рис. 3**

Окрім того, подана задача представляє самостійний інтерес для визначення максимальних та мінімальних відхилень напружень в канатах підйомних механізмів при пуску попередньо навантажених систем, а також при їх незапланованій зупинці.

Висновки

В результаті застосування модифікованого методу продовження при розв'язанні початково-крайових задач для телеграфного та хвильового рівнянь для змінних областей є можливим одержати розв'язок цих задач в квадратурах. Виявляється, що без врахування зміни довжини каната по суті не вдається отримати модель системи, що складається з каната та шківів намотки, достатньо адекватну натуральній. Необхідно враховувати також, що канат на шківі та поза ним навантажується по-різному, і тому поздовжні переміщення описуються різними рівняннями математичної фізики. За допомогою методу відображення та продовження можна моделювати хвильові процеси у врівноважених шахтних підйомних установках, а саме: досліджувати появу додаткових хвиль, які є результатом відбиття первинних хвиль від граничної поверхні.

Список використаних джерел:

1. Fritzkowski P. G. Dynamics of a rope modeled as a discrete system with extensible members / P. G. Fritzkowski, H. A. Kaminski // *Computational Mechanics* – 2009. – Vol. 44(4). – P. 473-480. doi: 10.1590/S1679-78252013000100009.
2. Razdolsky A. G. Propagation of longitudinal deformation wave along a lifting rope of variable length / A. G. Razdolsky // *International journal of solids and structures*. – 2011. – Vol. 48, N 24. – P. 359–364. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2011.08.005.
3. Зеленська Т. С. Дослідження напружено-деформівного стану підйомних канатів в динаміці крутильно-поздовжніх переміщень / Т. С. Зеленська, Г. В. Даниліна // *Машинобудування: зб. наук. пр. / Укр. інж.-пед. акад.* – Харків, 2014. – Вип. 13. – С. 55–62.
4. Зеленская Т. С. Переходные процессы в канатах с переменной верхней границей / Т. С. Зеленская, Г. В. Данилина // *Машинобудування: зб. наук. пр. / Укр. інж.-пед. акад.* – Харків, 2013. – Вип. 12. – С. 6–12.

References

1. Fritzkowski, P & Kaminski, H 2009, 'Dynamics of a rope modeled as a discrete system with extensible members', *Computational Mechanics*, no. 44(4), pp. 473-480. doi: 10.1007/s00466-009-0387-2.
2. Razdolsky, A 2011, 'Propagation of longitudinal deformation wave along a lifting rope of variable length', *International journal of solids and structures*, vol. 48, no. 24, pp. 359-364. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2011.08.005.
3. Zelenska, T & Danylina G 2014, 'Research intense the deformed condition of lifting ropes in dynamics of torsional and longitudinal movements', *Mashynobuduvannia*, no. 13, pp. 55-62.
4. Zelenska, T & Danylina G 2013, 'Transient processes in the ropes with a variable upper boundary', *Mashynobuduvannia*, no. 12, pp. 6-12.

Стаття надійшла до редакції 10 листопада 2014 р.