Литвин О.М., Нечуйвітер О.П.

ЛАГРАНЖЕВА ПОЛІНОМІАЛЬНА ІНТЕРФЛЕТАЦІЯ В НАБЛИЖЕНОМУ ОБЧИСЛЕННІ ІНТЕГРАЛІВ ВІД ШВИДКОСЦИЛЮЮЧИХ ФУНКЦІЙ ТРЬОХ ЗМІННИХ

В доповіді доводяться наступні теореми.

Теорема 1. Нехай $p=(p_1,p_2,p_3),\ f(x_1,x_2,x_3)\in C^p(J^3),\ J=[-1,1],$ $D^p=\dfrac{\partial^{p_1+p_2+p_2}}{\partial x_1^{p_1}\partial x_2^{p_2}\partial x_3^{p_3}},$ $\tilde{B}^p=\left\{\tilde{g}(x)\mid \tilde{g}\in C^p(J^3),\, D^p\tilde{g}=0\right\}$; $E(f)$ - величина найкращого наближення функції f множиною $\tilde{B}^p$ з нормою $\|\cdot\|=\|\cdot\|_{L_1(J^3)}$; $\tilde{g}^*\in\tilde{B}^p$ - елемент найкращого наближення; $x_{1i_1}=\cos(i_1\pi/(p_1+1)),\quad i_1=\overline{1,p_1}$, $x_{2i_2}=\cos(i_2\pi/(p_2+1)), i_2=\overline{1,p_2}$, $x_{3i_3}=\cos(i_3\pi/(p_3+1)), i_3=\overline{1,p_3}$ - нулі поліномів U_{p_1},U_{p_2},U_{p_3} Чебишева 2-го роду відповідного степеня p_1, p_2 та p_3:

$$U_m(t)=\frac{\sin(m+1)\theta}{\sin\theta},\quad \cos\theta=t,\quad m=0,1,\dots,$$

$l_{kp_ki_k}$ - базисні поліноми Лагранжа, $l_{kp_ki_k}(x_{ki'_k})=\delta_{i_ki'_k}$,

$$\begin{aligned}
\tilde{g}^*(x)={}&\sum_{i_1=1}^{p_1} f(x_{1i_1},x_2,x_3)l_{1p_1i_1}(x_1)+\sum_{i_2=1}^{p_2} f(x_1,x_{2i_2},x_3)l_{2p_2i_2}(x_2)+\\
&+\sum_{i_3=1}^{p_3} f(x_1,x_2,x_{3i_3})l_{3p_3i_3}(x_3)-\sum_{i_1=1}^{p_1}\sum_{i_2=1}^{p_2} f(x_{1i_1},x_{2i_2},x_3)l_{1p_1i_1}(x_1)l_{2p_2i_2}(x_2)-\\
&-\sum_{i_1=1}^{p_1}\sum_{i_3=1}^{p_3} f(x_{1i_1},x_2,x_{3i_3})l_{1p_1i_1}(x_1)l_{3p_3i_3}(x_3)-\sum_{i_2=1}^{p_2}\sum_{i_3=1}^{p_3} f(x_1,x_{2i_2},x_{3i_3})l_{2p_2i_2}(x_2)l_{3p_3i_3}(x_3)+\\
&+\sum_{i_1=1}^{p_1}\sum_{i_2=1}^{p_2}\sum_{i_3=1}^{p_3} f(x_{1i_3},x_{2i_2},x_{3i_3})l_{1p_1i_1}(x_1)l_{2p_2i_2}(x_2)l_{3p_3i_3}(x_3),
\end{aligned}\tag{1}$$

Тоді для $f(x)$ існує єдиний найменш відхилений від $f(x)$ у нормі $\|\cdot\|=\|\cdot\|_\infty$ елемент $\tilde{g}^*\in B^p$ і цей елемент має вид (1), тобто є інтерфлетантом, який інтерфлетує $f(x)$ на площинах $x_k=x_{ki_k},\quad i_k=\overline{1,p_k};\quad k=1,2,3.$

Теорема 2. Справедлива наступна оцінка похибки наближення інтегралу

$$I_3(f,\omega)=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x_1,x_2,x_3)\sin\omega x_1\sin\omega x_2\sin\omega x_3\,dx_1dx_2dx_3$$

кубатурною формулою $\tilde{I}_3(f,\omega)=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\tilde{g}^*f(x_1,x_2,x_3)\sin\omega x_1\sin\omega x_2\sin\omega x_3\,dx_1dx_2dx_3$

при умові, що всі інтеграли в кубатурній формулі знаходяться точно

$$\left|I_3(f,\omega)-\tilde{I}_3(f,\omega)\right|\le\frac{M}{2^{p_1+p_2+p_3-3}p_1!p_2!p_3!}.$$