Каргапольцева Г.В.

ЧИСЕЛЬНА РЕАЛІЗАЦІЯ МЕТОДУ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ З ОПТИМАЛЬНИМ ВИБОРОМ БАЗИСНИХ ФУНКЦІЙ (ТРИКУТНІ ЕЛЕМЕНТИ)

Одним з найбільш ефективних та універсальних засобів розв’язання та дослідження складних математичних проблем, який зарекомендував себе протягом десятиліть, є метод скінченних елементів (МСЕ). В доповіді описується підхід до розв’язання задачі Діріхле для рівняння Пуассона зі сталою та змінною правими частинами методом скінченних елементів (трикутні елементи), в якому невідомі базисні функції знаходяться з умови мінімуму відповідного функціонала. Розглядаються частинні випадки, для яких викладено метод знаходження однієї оптимальної функції $h(t)$ у вигляді полінома n -го степеня, та випадки, коли з кожною вершиною тріангуляції пов’язана своя оптимальна функція.

Розглядається задача Діріхле для рівняння Пуассона.

$u(x,y)=g(x,y),(x,y)\in G$, (1)

$u(x,y)=0,(x,y)\in\partial G$, де G – багатокутник. (2)

Спираючись на праці О.М. Литвина та результати попередніх робіт, знаходимо наближений розв’язок $\tilde{u}(x,y)$ задачі (1) – (2). Розглянуто наступний приклад.

І. Наближений розв’язок поставленої задачі шукається для випадку, коли з кожним вузлом тріангуляції пов’язана єдина оптимальна базисна функція та представляється у вигляді полінома, який задовольняє умови $h(0)=1; h(1)=0$:

$$h(t)=(1-t)(1+a_1t+a_2t^2),$$

де a_1, a_2 – невідомі сталі коефіцієнти.

ІІ. Наближений розв’язок поставленої задачі шукається для випадку, коли оптимальні базисні функції пов’язані з кожним вузлом тріангуляції, та представляються у вигляді полінома 2,3,4,5 степеня, який задовольняє умови $h_j(0)=1; h_j(1)=0; j=\overline{1,N}$:

$$h_j(t)=(1-t)(1+\sum_{i=1}^{m}a_{ij}t^i); m=\overline{1,4}; j=\overline{1,N},$$

де $a_{ij}(i=\overline{1,4}; j=\overline{1,N})$ - невідомі сталі коефіцієнти, N - кількість вузлів тріангуляції.

Для чисельної реалізації була обрана область $G=\{(x,y)|0<x<1, 0<y<1\}$, яка розбивалась на 32 трикутники.

Запропонований метод наближеного відшукання однієї базисної функції та функцій, пов’язаних з кожним вузлом тріангуляції, в методі скінченних елементів (трикутні елементи) (як для сталої, так і для змінної правих частин рівняння Пуассона) протестований за допомогою програм, складених в Mathcad. Результати обчислювального експерименту демонструють доцільність використання оптимальних базисних функцій, оскільки майже всі характеристики, які знаходились для порівняння з точним розв’язком, краще, ніж в класичному методі скінченних елементів (трикутні елементи) з лінійними базисними функціями.

В подальших дослідженнях планується реалізувати підхід до знаходження наближеного розв’язку задачі (1) – (2) з оптимальними базисними функціями, який передбачає ще й розв’язання відповідного диференціального рівняння.