# ОПТИМАЛЬНИЙ ВИБІР ЛІНІЙ ІНТЕРЛІНАЦІЇ В МЕТОДІ ЛІДР НАБЛИЖЕНОГО РОЗВ’ЯЗКУ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ЕЛІПТИЧНОГО ТИПУ В ПРЯМОКУТНІЙ ОБЛАСТІ

*Нефьодова І.В., ст. викладач каф ЕМС*
*ННППІ УІПА*

Питання вибору вузлів інтерполяції при наближенні диференційовних функцій алгебраїчними інтерполяційними поліномами є одним з ключових питань теорії наближення. Це ж стосується і вибору ліній інтерлінації при наближенні функцій двох і більше змінних операторами поліноміальної інтерлінації. Метод ЛІДР, запропонований в працях О.М. Литвина (див. бібліографію [1, с. 528-530]), допускає вибір ліній інтерлінації з умови найкращого наближення формули інтерлінації до точного розв’язку. В роботі [2] для найкращого наближення функцій в нормі $L^1[-1,1]^2$ запропоновано використовувати оператори інтерлінації на лініях, які є вузлами поліномів Чебишова 2-го роду (по $x$ і по $y$) [3, с. 90-97]. В даній роботі цю ідею пропонується застосувати в методі ЛІДР.

Наближений розв’язок крайової задачі

$$Lu(x,y) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}\right) + c(x,y)u = f(x,y),\ (x,y)\in G,$$

$$u(x,y)=0,\ \left(x,y\in\partial G\right)$$

$$G=\left\{|x|<1,\ |y|<1\right\},\ \partial G=\left\{(x,y): x=\pm1, -1\le y\le 1;\ y=\pm1, -1<x<1\right\}$$

будемо знаходити методом ЛІДР у вигляді формули

$$w(x,y)=\sum_{k=1}^{m-1}h1_k(x)\varphi_k(y)+\sum_{l=1}^{n-1}h2_l(y)\psi_l(x)-\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{l=1}^{n-1}w_{k,l}h1_k(x)h2_l(y),\ w\in U_h, \tag{1}$$

де $h1_k(x)=h1_k(x,X)=\prod_{\substack{i=1,\\ i\ne k}}^{m-1}\frac{x-X_i}{X_k-X_i}$, $h2_l(y)=h2_l(y,Y)=\prod_{\substack{j=1,\\ j\ne l}}^{n-1}\frac{y-Y_i}{Y_k-Y_i}$,

$X=\left[X_1,...,X_{m-1}\right]$, $Y=\left[Y_1,...,Y_{n-1}\right]$, функції $\varphi_k(y), \left(k=\overline{1,m-1}\right)$ та $\psi_l(x), \left(l=\overline{1,n-1}\right)$ і сталі $w_{k,l}\ \left(k=\overline{1,m-1};\ l=\overline{1,n-1}\right)$ є невідомими з властивостями

$$\psi_l(x_k)=\varphi_k(y_l)=w_{k,l}, \tag{2}$$

$$\psi_l(-1)=0,\ \psi_l(1)=0,\ \varphi_k(-1)=0,\ \varphi_k(1)=0,\ \left(k=\overline{1,m-1};\ l=\overline{1,n-1}\right), \tag{3}$$

які знаходяться з умови мінімуму функціоналу, відповідного поставленій крайовій задачі.

Ця задача еквівалентна варіаційній задачі

$$a_G\left(u_h^*,w\right)=\left(f,w\right)_G,\ \ \forall w\in U_h, \tag{4}$$

або задачі про мінімум відповідного функціонала $J_G(w)\to\min\limits_{w}$.

Згідно з лемою Сеа для похибки справедлива нерівність

$$\left\|u-u_h^*\right\|_{W_2^n(G)} \le C \inf_{w\in U_h} \left\|u-w\right\|_{W_2^n(G)},$$

у якій зменшити праву частину можна лише за рахунок вибору ліній інтерлінації. Оскільки з теореми про наближення диференційовних функцій операторами поліноміальної інтерлінації похибка $R(x,y)=u(x,y)-w(x,y)$ визначається наступною формулою

$$R(x,y)=u^{(m,n)}(\xi,\eta)\cdot\frac{\prod_{i=0}^{m}(x-X_i)}{(m+1)!}\cdot\frac{\prod_{j=0}^{n}(y-Y_j)}{(n+1)!},$$

$$X_0=0<\xi<1=X_m,\ \ Y_0=0<\eta<1=Y_n,$$

тобто $\left|R(x,y)\right|$ для заданої функції $u(x,y)$ буде найменшим при такому виборі прямих інтерлінації, при яких функція $\dfrac{\prod_{i=0}^{m}\left|x-X_i\right|}{(m+1)!}\cdot\dfrac{\prod_{j=0}^{n}\left|y-Y_j\right|}{(n+1)!}$ буде мінімальною для $|x|\le 1, |y|\le 1$.

Це означає, що при наближенні функції $u(x,y)$ в рівномірній нормі лінії інтерлінації повинні вибиратись з умови, щоб $X_i$ та $Y_j$ були, наприклад, вузлами поліномів Чебишова першого роду.

<u>Теорема.</u> Для оптимального вибору прямих інтерлінації у формулі (1) треба розв’язати задачу

$$F(X,Y)=J1(X,Y)\to\min_{X,Y},$$

де

$$J1(X,Y)=J(w)=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left(a(x,y)\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+b(x,y)\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2+c(x,y)w^2-2f(x,y)w\right)dxdy$$

при умові, що $w(x,y)=w(x,y,X,Y)$.

Для чисельної реалізації твердження цієї теореми пропонується використовувати за початкове наближення вектори $X^0, Y^0$ компоненти яких є нулями побудованих в роботі [4] поліномів, що задовольняють заданим однорідним граничним умовам і найменше відхиляються від нуля.

Література

1 Литвин О.М. Інтерлінація функцій та деякі її застосування / О.М. Литвин. – Х. : Основа, 2002. – 544 с.

2. Haussmann W. Blending interpolation and best $L^1$- approximation / W. Haussmann, K. Zeller // Arch. Math. (Basel). – 1983. – Vol. 40, № 6. – P. 545–552.

3. Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений / В.М. Тихомиров. – М. : МГУ, 1976. – 304 с.

4. Litvin O.N. About construction of polynomials $P_{2n+2m}(x)$ with properties $P_{2n+2m}^{(s)}(\pm 1) = 0 \quad s = \overline{0, m-1}$ the least deviating from a zero on a segment $[-1, 1]$ / O.N. Litvin, L.S. Lobanova, I.V. Nefedova // Contemporary problems of mathematics, mechanics and computing sciences. – Kharkov: «Apostrof», 2011. – P. 262–271.