АКАДЕМИЯ НАУК СССР

ПРОБЛЕМЫ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

1

МОСКВА · 1977

ПРОБЛЕМЫ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

Том XIII 1977 Вып. 1

УДК 621.395.74:519.152

АНАЛИЗ СИСТЕМЫ ОБСЛУЖИВАНИЯ ПРИ ВХОДНОМ ПОТОКЕ ТРЕБОВАНИЙ С ГИПЕРЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ

В. А. Попов, М. Л. Литвинов, А. Л. Литвинов

Исследуется система массового обслуживания при произвольном распределении времени обслуживания и гиперэкспоненциальном входном потоке второго порядка. С помощью последнего можно с достаточной степенью точности аппроксимировать входные потоки, у которых коэффициент вариации больше единицы. Получены характеристики функционирования в стационарном состоянии.

В настоящее время достаточно хорошо изучены системы массового обслуживания (СМО), в которых один из потоков событий является эрланговским [1]. Между тем гиперэкспоненциальные потоки являются важным дополнением эрланговских в случае аппроксимации такими потоками событий реальных систем, для которых отношение среднеквадратичного отклонения времени между соседними событиями потока к математическому ожиданию этого времени (коэффициент вариации) больше единицы. Уже для гиперэкспоненциального потока второго порядка при фиксированном математическом ожидании это отношение путем выбора соответствующих параметров можно сделать как угодно большим [2], т. е. с помощью этого потока оказывается возможным аппроксимировать потоки событий в реальных системах, у которых коэффициент вариации больше единицы.

Известно, что для однолинейной модели вида $GI|G|1$ при входном потоке, у которого преобразование Лапласа — Стилтьеса функции распределения является отношением двух многочленов, может быть получено преобразование Лапласа — Стилтьеса функции распределения времени ожидания заявок в очереди [3]. В настоящей работе для систем вида $H_2M|G|1$, где символ H_2M соответствует гиперэкспоненциальному потоку второго порядка, получены более полные результаты путем использования линейчатого марковского процесса [4].

Пусть входной поток описывается гиперэкспоненциальным распределением второго порядка с функцией распределения

$$A(t)=1-\sum_{i=1}^{2}a_ie^{-\lambda_it},\quad \sum_{i=1}^{2}a_i=1$$

и средней интенсивностью $\Lambda=[a_1/\lambda_1+a_2/\lambda_2]^{-1}$. Функция распределения времени обслуживания $B(t)$, ее преобразование Лапласа — Стилтьеса — $\beta(s)$, интенсивность обслуживания $r(u)=B'(u)[1-B(u)]^{-1}$ и средняя интенсивность обслуживания равна b. Предполагается, что функция $B(u)$ имеет производную.

Процесс поступления требований в систему можно свести к марковскому, введя множество состояний, отличающихся числом требований в

СМО и номером i, $i=1, 2$, соответствующим интенсивности λ_i входного потока при этом состоянии (назовем этот номер этапом некоторой фиктивной регулирующей системы). С приходом очередного требования система переходит в одно из состояний, соответствующее изменившемуся числу требований в СМО, а этап нового состояния выбирается регулирующей системой случайным образом так, что i-й этап может быть выбран с вероятностью a_i.

Время прохождения i-го этапа распределено по экспоненциальному закону с параметром λ_i. Такая процедура позволяет определить линейчатый марковский процесс, описывающий функционирование данной системы в фазовом пространстве $\{[0, i], [n, i, u], n\geqslant 1, i=1, 2; u\geqslant 0\}$. Здесь состояние $[0, i]$ соответствует полностью свободной системе, когда этап регулирующей системы равен i, а $[n, i, u]$ соответствует состоянию, когда в системе находится n требований, этап регулирующей системы равен i и время, в течение которого продолжается обслуживание очередного требования, равно u.

Обозначим через $p_0^i(t)$ вероятность состояния $[0, i]$ в момент времени t, а через $p_n^i(t, u)$ — плотность вероятности состояния $[n, i, u]$. Рассматривая возможные изменения в системе за бесконечно малый промежуток времени и используя формулу полной вероятности, можно получить систему интегродифференциальных уравнений, описывающих функционирование данной системы. Если $b>\Lambda$, то для данной системы существует стационарный режим [3], характеризующийся вероятностями p_0^i и стационарными плотностями вероятностей $p_n^i(u)$. Переходя в системе уравнений для $p_0^i(t)$ и $p_n^i(t, u)$ к пределу при $t\to\infty$, получим систему уравнений, описывающую стационарное состояние рассматриваемой системы

$$\lambda_i p_0^i = \int_0^\infty p_1^i(u) r(u)\, du, \quad i=1, 2, \tag{1}$$

$$\frac{d}{du} p_1^i(u) = -[\lambda_i + r(u)] p_1^i(u), \quad i=1, 2, \tag{2}$$

$$\frac{d}{du} p_n^i(u) = -[\lambda_i + r(u)] p_n^i(u) + a_i \sum_{j=1}^{2} \lambda_j p_{n-1}(u), \quad i=1, 2, \quad n>1$$

и граничные условия

$$p_1^i(0) = \int_0^\infty p_2^i(u) r(u)\, du + a_i \sum_{j=1}^{2} \lambda_j p_0^j, \quad i=1, 2, \tag{3}$$

$$p_n^i(0) = \int_0^\infty p_{n+1}^i(u) r(u)\, du, \quad n>1, \quad i=1, 2.$$

Стационарными вероятностями для случая, когда не учитывается время, в течение которого продолжается обслуживание, являются

$$p_0^i, \; p_n^i = \int_0^\infty p_n^i(u)\, du, \; n>0, \; i=1, 2,$$

с условием нормировки

$$\sum_{i=1}^{2} \sum_{n=0}^{\infty} p_n^i = 1. \tag{4}$$

Для решения систем уравнений (1)—(4) введем производящие функции

$$Q_i(z,u)=\sum_{n=1}^{\infty}p_n{}^i(u)z^n,\quad i=1,2.$$

Системе уравнений (2) соответствует система вида

$$\frac{d}{du}Q_i(z,u)=-[\lambda_i+r(u)]Q_i(z,u)+a_iz\sum_{j=1}^{2}\lambda_jQ_j(z,u),\tag{5}$$

а системам (1) и (3) соответствует система вида

$$zQ_i(z,0)=\int_0^{\infty}Q_i(z,u)r(u)\,du+a_iz^2\sum_{j=1}^{2}\lambda_jp_0{}^j-\lambda_izp_0{}^i.\tag{6}$$

Решение системы (5) имеет вид

$$Q_1(z,u)=[1-B(u)]\left\{Q_1(z,0)\left[\operatorname{ch}(uq)+\frac{\varphi_1}{q}\operatorname{sh}(uq)\right]+\right.\tag{7}$$

$$\left.+q^{-1}a_1\lambda_2Q_2(z,0)\operatorname{sh}(uq)\right\}e^{uf},$$

$$Q_2(z,u)=[1-B(u)]\{Q_2(z,0)[\operatorname{ch}(uq)+q^{-1}\varphi_2\operatorname{sh}(uq)]+\tag{8}$$
$$+q^{-1}a_2\lambda_1Q_1(z,0)\operatorname{sh}(uq)\}e^{uf},$$

где $f=f(z)={}^1/_2[(a_1\lambda_1+a_2\lambda_2)z-(\lambda_1+\lambda_2)]$, $\varphi_i=\varphi_i(z)=f+\lambda_i(1-a_iz)$,
$q=q(z)={}^1/_2[(a_1\lambda_1+a_2\lambda_2)^2z^2-2(a_1\lambda_1{}^2-\lambda_1\lambda_2+a_2\lambda_2{}^2)z+(\lambda_1-\lambda_2)^2]^{1/2}$.

Подставив (7) и (8) в (6) и решив получившуюся систему относительно $Q_i(z,0)$, $i=1,2$, получим

$$Q_1(z,0)=\tag{9}$$
$$=\frac{D_1[2qz-(q-\varphi_1)\beta(-q_1)-(q-\varphi_2)\beta(-q_2)]+a_1\lambda_2z[\beta(-q_1)-\beta(-q_2)]D_2}{2q[z-\beta(-q_1)][z-\beta(-q_2)]},$$

$$Q_2(z,0)=\tag{10}$$
$$=\frac{D_2[2qz-(q-\varphi_2)\beta(-q_1)-(q-\varphi_1)\beta(-q_2)]+a_2\lambda_1z[\beta(-q_1)-\beta(-q_2)]D_1}{2q[z-\beta(-q_1)][z-\beta(-q_2)]},$$

где

$$D_i=-\lambda_izp_0{}^i+a_iz^2\sum_{j=1}^{2}\lambda_jp_0{}^j,\quad i=1,2,$$

$$q_1=f+q,\ q_2=f-q.$$

На границе области $|z|=1$ имеем

$$|\beta(-q_2)|=\left|\int_0^{\infty}\exp\{-(a_1\lambda_2+a_2\lambda_1)t\}dB(t)\right|<\int_0^{\infty}dB(t)=1.$$

Согласно теореме Руше, функция $z-\beta(-q_2)$ имеет только один нуль ξ внутри единичного круга, а функция $z-\beta(-q_1)$ не имеет нулей в той же области. Поскольку $Q_i(z,0)$, $i=1,2$, сходится в области $|z|=1$, нули числителя и знаменателя правой части выражения (9) и (10) в области $|z|=1$ должны совпадать и, следовательно,

$$(11)\qquad p_0^1=\frac{a_1\lambda_2\xi}{q(\xi)+\varphi_2(\xi)}\,n^2$$

Найдем производящие функции вероятностей p_n^i

$$Q_i(z)=\sum_{n=1}^{\infty}p_n^i z^n=\int_0^{\infty}Q_i(z,u)\,du,\quad i=1,2.$$

После интегрирования и упрощений получим

$$(12)\qquad Q_1(z)=\frac{[D_1(q+\varphi_1)+a_1\lambda_2 zD_2][\beta(-q_1)-1]}{2qq_1[z-\beta(-q_1)]}+\frac{[D_1(q+\varphi_2)-a_1\lambda_2 zD_2][\beta(-q_2)-1]}{2qq_2[z-\beta(-q_2)]}$$

$$(13)\qquad Q_2(z)=\frac{[D_2(q+\varphi_2)+a_2\lambda_1 zD_1][\beta(-q_1)-1]}{2qq_1[z-\beta(-q_1)]}+\frac{[D_2(q+\varphi_1)-a_2\lambda_1 zD_1][\beta(-q_2)-1]}{2qq_2[z-\beta(-q_2)]}.$$

Воспользовавшись условием нормировки (4), которое можно переписать в виде $Q_1(1)+Q_2(1)+p_0^1+p_0^2=1$, найдем, что

$$(14)\qquad p_0^1+p_0^2=p_0=1-\rho,$$

где $\rho=\Lambda/b$ — загрузка системы.

Подставив (11) в (14), найдем

$$(15)\qquad p_0^1=\frac{a_1\lambda_2\xi(1-\rho)}{q(\xi)+\varphi_2(\xi)+a_1\lambda_2\xi},\quad p_0^2=\frac{[q(\xi)+\varphi_2(\xi)][1-\rho]}{q(\xi)+\varphi_2(\xi)+a_1\lambda_2\xi}.$$

Определим среднее число требований в системе

$$L=\sum_{i=1}^{2}\sum_{n=1}^{\infty}np_n^i=\sum_{i=1}^{2}\left[\frac{d}{dz}Q_i(z)\right]_{z=1}=$$

$$=\rho+\frac{\rho}{2(1-\rho)}[(C_a^2-1)+\rho(1+C_b^2)]-\frac{\Lambda}{\lambda_1\lambda_2}\left(\Lambda-\frac{1}{1-\rho}\sum_{i=1}^{2}\lambda_i p_0^i\right),$$

где $C_a^2=2\Lambda^2\sum_{i=1}^{2}\frac{a_i}{\lambda_i^2}-1$ — квадрат коэффициента вариации входного потока, а C_b^2 — квадрат коэффициента вариации времени обслуживания.

Определим преобразование Лапласа — Стилтьеса функции распределения времени ожидания

$$\varphi(s)=p_0+\int_0^{\infty}\left[\sum_{i=1}^{2}\sum_{n=1}^{\infty}p_n^i(u)\beta^{n-1}(s)\int_0^{\infty}e^{-sv}\frac{B'(u+v)}{1-B(u)}dv\right]du,$$

где $\int_0^{\infty}e^{-sv}\frac{B'(u+v)}{1-B(u)}dv$ — преобразование Лапласа — Стилтьеса функции распределения времени, необходимого для завершения обслуживания требования, которое в момент поступления очередного требования уже обслуживалось в течение времени u [5]. Используя формулы (7)–(10), после соответствующих преобразований получим

$$\varphi(s)=(1-\rho)+\frac{[1-\beta(s)][\lambda_1\lambda_2(1-\rho)-s\sum_{i=1}^{2}\lambda_i p_0^i]}{\lambda_1\lambda_2[\beta(s)-1]+[\lambda_1+\lambda_2-(a_1\lambda_1+a_2\lambda_2)\beta(s)]s-s^2}. \tag{16}$$

Заметим, что выражение (16) – аналог формулы Полячека – Хинчина для исследуемой системы. Среднее время ожидания равно

$$\omega=-\varphi'(0)=\frac{\rho^2(C_b^2+C_a^2)}{2\Lambda(1-\rho)}-\frac{\rho}{\lambda_1\lambda_2}\left(\Lambda-\frac{1}{1-\rho}\sum_{i=1}^{2}\lambda_i p_0^i\right).$$

Оказывается возможным распространить используемую методику на случай гиперэкспоненциального входного потока k-го порядка. В этом случае уравнения (1)–(3) будут иметь аналогичный вид, за исключением того, что i будет принимать значения от 1 до k. Однако трудности их решения аналитическими методами резко возрастают с ростом k.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Прабху Н.* Методы теории массового обслуживания и управления запасами. М., «Машиностроение», 1969.
2. *Кокс Д. Р., Смит В. Л.* Теория восстановления. М., «Сов. радио», 1967.
3. *Климов Г. П.* Стохастические системы обслуживания. М., «Наука», 1966.
4. *Беляев Ю. К.* Линейчатые марковские процессы и их приложение к задачам теории надежности. Тр. 6-го Всесоюзн. совещ. по теории вероятн. и матем. статистике. Вильнюс – Паланга, 1960. Вильнюс, Госполитнаучиздат, 1962, 309–323.
5. *Риордан Дж.* Вероятностные системы обслуживания. М., «Связь», 1966.

Поступила в редакцию
2 июня 1975 г.
После переработки
15 декабря 1975 г.