



**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ,
МОЛОДЕЖИ И СПОРТА УКРАИНЫ
УКРАИНСКАЯ ИНЖЕНЕРНО-
ПЕДАГОГИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ**

Л.Д.Фесенко, И.А.Соскова

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

ЧАСТЬ 1

Тексты лекций

Харьков
2011

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ, МОЛОДЕЖИ И СПОРТА УКРАИНЫ
УКРАИНСКАЯ ИНЖЕНЕРНО-ПЕДАГОГИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ

Л.Д.Фесенко, И.А.Соскова

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

Часть 1

Тексты лекций

Утверждено
Научно-методическим советом
Украинской инженерно-
педагогической академии
Протокол № 7 от 27.04.10 г.

Харьков 2011

УДК 621.3.01(075.8)

Фесенко Л.Д., Соскова И.А.

Теоретические основы электротехники, часть 1. Тексты лекций. – Х.: УИПА, 2011. - 175 с., ил.201.

Тексты лекций включают материал по темам: общие положения теории электрических цепей, методы расчета линейных электрических цепей постоянного тока, гармонический режим в линейных электрических цепях, резонанс в электрических цепях, цепи со взаимной индуктивностью, трехфазные цепи, четырехполюсники, фильтры.

Тексты лекций предназначены для организации самостоятельной работы студентов высших учебных заведений инженерных и инженерно-педагогических специальностей электротехнического профиля.

Ответственный за выпуск Мосиенко А.Н.

Рецензент С.В. Петров, доц., канд. техн. наук

(Украинская инженерно-педагогическая академия)

© Л.Д.Фесенко, 2011
© И.А.Соскова, 2011
©Украинская инженерно -
педагогическая академия, 2011

СОДЕРЖАНИЕ

| | |
|---|----|
| ВСТУПИТЕЛЬНАЯ ЛЕКЦИЯ | 7 |
| РАЗДЕЛ 1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ.. | 13 |
| ЛЕКЦИЯ 1. | 13 |
| 1.1. Основные понятия, определения и обозначения теории электрических цепей. | 13 |
| 1.2. Элементы электрических цепей. | 17 |
| ЛЕКЦИЯ 2 | 23 |
| 1.3. Топологические понятия в электрических цепях. | 23 |
| 1.4. Классификация электрических цепей. | 25 |
| 1.5. Основные законы теории электрических цепей. | 26 |
| РАЗДЕЛ 2. МЕТОДЫ РАСЧЕТА ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ ПОСТОЯННОГО ТОКА. | 32 |
| ЛЕКЦИЯ 3. | 32 |
| 2.1. Метод эквивалентных преобразований. | 32 |
| 2.2. Метод уравнений Кирхгофа. | 39 |
| ЛЕКЦИЯ 4. | 41 |
| 2.3. Метод контурных токов. | 41 |
| 2.4. Метод узловых напряжений. | 49 |
| ЛЕКЦИЯ 5. | 55 |
| 2.5. Принцип взаимности. | 55 |
| 2.6. Принцип наложения (суперпозиции). | 56 |
| 2.7. Двухполюсники. Теоремы об активном двухполюснике. | 58 |
| РАЗДЕЛ 3. ГАРМОНИЧЕСКИЙ РЕЖИМ В ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ | 64 |
| ЛЕКЦИЯ 6. | 64 |
| 3.1. Гармоническое колебание и его параметры. | 64 |
| 3.2. Действующее, среднее и среднее по модулю значения токов и напряжений. | 65 |
| 3.3. Метод комплексных амплитуд. | 67 |
| 3.3.1. Общие положения. | 67 |
| 3.3.2. Комплексное преобразование. | 68 |
| 3.3.3. Комплексная схема замещения. Закон Ома в комплексной форме. | 69 |
| 3.3.4. Законы Кирхгофа в комплексной форме. | 74 |
| 3.3.5. Применение метода комплексных амплитуд к расчету электрических цепей гармонического тока. | 75 |
| ЛЕКЦИЯ 7. | 77 |
| 3.4. Мощность в цепях гармонического тока. | 77 |
| 3.5. Баланс мощностей в цепи гармонического тока. Физический смысл реактивной мощности. | 80 |
| РАЗДЕЛ 4. РЕЗОНАНСНЫЕ ЯВЛЕНИЯ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ. | 83 |
| ЛЕКЦИЯ 8. | 83 |

| | |
|---|-----|
| 4.1. Резонанс в последовательном контуре (резонанс напряжений) | 83 |
| 4.2. Частотные и резонансные характеристики последовательного контура. | 86 |
| 4.3. Комплексная проводимость цепи. Эквивалентные преобразования последовательного и параллельного соединения элементов. Треугольник проводимостей. | 89 |
| ЛЕКЦИЯ 9. | 91 |
| 4.4. Резонанс в параллельном контуре (резонанс токов). | 91 |
| 4.5. Частотные и резонансные характеристики параллельного контура. | 96 |
| 4.6. Условие передачи максимальной мощности от источника к нагрузке. | 97 |
| РАЗДЕЛ 5. ГАРМОНИЧЕСКИЙ РЕЖИМ В ЦЕПЯХ СО ВЗАИМНОЙ ИНДУКТИВНОСТЬЮ. | 100 |
| ЛЕКЦИЯ 10. | 100 |
| 5.1. Взаимная индуктивность. | 100 |
| 5.2. Согласное и встречное включение индуктивных элементов. | 101 |
| 5.3. Экспериментальное определение взаимной индуктивности и полярности катушек. | 103 |
| 5.4. Индуктивность рассеяния катушек. Коэффициент связи. | 104 |
| 5.5. Расчет цепей со взаимной индуктивностью при гармоническом режиме. | 105 |
| 5.6. Последовательное и параллельное соединение индуктивно связанных катушек. | 108 |
| ЛЕКЦИЯ 11. | 112 |
| 5.7. Трансформатор, работающий в линейном режиме (без насыщения). | 112 |
| 5.8. Уравнение и векторная диаграмма трансформатора. | 113 |
| 5.9. Идеальный трансформатор. Коэффициент трансформации. | 114 |
| 5.10. Схема замещения трансформатора. | 116 |
| РАЗДЕЛ 6. ТРЕХФАЗНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ. | 117 |
| ЛЕКЦИЯ 12. | 117 |
| Введение. | 117 |
| 6.1. Основные понятия и определения. | 117 |
| 6.2. Трехфазная система, соединенная по схеме «звезда-звезда». | 120 |
| 6.3. Расчет трехфазной цепи, соединенной по схеме «звезда-звезда» | 122 |
| ЛЕКЦИЯ 13. | 124 |
| 6.4. Трехфазная цепь, соединенная по схеме «треугольник – треугольник» | 124 |
| 6.5. Аварийные режимы трехфазной цепи, нагрузка которой соединена «звездой». | 126 |
| 6.5.1. Короткое замыкание одной из фаз симметричной нагрузки | 126 |

| | |
|--|-----|
| 6.5.2. Обрыв одной из фаз симметричной трехфазной нагрузки. | 127 |
| 6.5.3. Обрыв нейтрального провода в случае несимметричной трехфазной нагрузки | 128 |
| ЛЕКЦИЯ 14. | 129 |
| 6.6. Симметричные системы ЭДС, напряжений, токов. | 129 |
| 6.7. Разложение несимметричной системы ЭДС, напряжений или токов на симметричные составляющие. | 130 |
| 6.8. Мощность в трехфазных цепях. | 132 |
| 6.9. Вращающееся магнитное поле. | 133 |
| РАЗДЕЛ 7. ТЕОРИЯ ПАССИВНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ПРОХОДНЫХ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ. | 136 |
| ЛЕКЦИЯ 15. | 136 |
| 7.1. Общие понятия и определения. | 136 |
| 7.2. Формы записи уравнений четырехполюсника. Матрицы четырехполюсника. | 137 |
| 7.2.1. Форма Y четырехполюсника. | 137 |
| 7.2.2. Форма Z (Y^{-1}) четырехполюсника. | 139 |
| 7.2.3. Форма A четырехполюсника. | 139 |
| 7.2.4. Форма B (A^{-1}) четырехполюсника. | 140 |
| 7.2.5. Форма H четырехполюсника. | 140 |
| 7.2.6. Форма G (H^{-1}) четырехполюсника. | 141 |
| 7.3. Соединение четырехполюсников. | 142 |
| 7.3.1. Каскадное соединение четырехполюсников. | 142 |
| 7.3.2. Параллельное соединение четырехполюсников. | 143 |
| 7.3.3. Последовательное соединение четырехполюсников. | 144 |
| ЛЕКЦИЯ 16. | 145 |
| 7.4. Симметричный четырехполюсник. | 146 |
| 7.5. Методы вычисления матриц четырехполюсников. | 147 |
| 7.5.1. Определение коэффициентов четырехполюсника по матрице собственных и общих сопротивлений метода контурных токов. | 147 |
| 7.5.2. Метод сравнения (расчет элементов матриц по уравнениям законов Кирхгофа). | 147 |
| 7.5.3. Представление сложного четырехполюсника соединением простых | 148 |
| 7.5.4. Определение коэффициентов четырехполюсника по опытам холостого хода и короткого замыкания. | 149 |
| 7.5.5. Расчет коэффициентов матрицы A по сопротивлениям холостого хода и короткого замыкания. | 150 |
| 7.6. Схемы замещения пассивных четырехполюсников. | 151 |
| 7.7. Входное сопротивление четырехполюсника. Характеристические сопротивления. Повторное сопротивление | 152 |

| | |
|--|------------|
| 7.8. Коэффициент распространения (мера передачи) четырехполосника. Логарифмические единицы затухания | 154 |
| 7.9. Запись уравнений четырехполосника через вторичные параметры. | 157 |
| РАЗДЕЛ 8. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПАССИВНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ФИЛЬТРОВ | 158 |
| ЛЕКЦИЯ 17. | 158 |
| 8.1. Основные определения и классификации электрических фильтров. | 158 |
| 8.2. Условие пропускания реактивного фильтра (основное неравенство) | 159 |
| 8.3. Характеристическое сопротивление фильтра. | 161 |
| 8.4. Фильтры типа К. | 161 |
| ЛЕКЦИЯ 18. | 164 |
| 8.5. Фильтр нижних частот типа К. | 165 |
| 8.6. Фильтры типа m | 167 |
| 8.7. Другие типы фильтров. | 172 |
| 8.7.1. Индуктивно - связанные контура. | 172 |
| 8.7.2. Мостовые фильтры. | 172 |
| 8.7.3. Пьезоэлектрические фильтры. | 173 |
| 8.7.4. Безиндуктивные RC-фильтры. | 174 |
| 8.7.5. Активные RC-фильтры (ARC- фильтры). | 174 |

ВСТУПИТЕЛЬНАЯ ЛЕКЦИЯ

- **Значение курса ТОЭ и его место в системе электротехнического образования.**

Под электротехникой понимают область практического использования электромагнитных явлений. Не все электромагнитные явления можно наблюдать непосредственно, но изучив и поняв их, можно управлять ими, использовать их на практике. При этом проектирование, расчет и разработка электротехнических устройств требует глубоких знаний теории электромагнитных процессов.

Курс теоретических основ электротехники является первым курсом электротехнического профиля, который изучается студентами всех электромеханических и энергетических специальностей. Он базируется на курсах физики, математики и содержит инженерные методы расчета, анализа и синтеза электрических и магнитных цепей, которые применяются к широкому классу современных электротехнических устройств.

Курс ТОЭ имеет исключительно большое значение для формирования научного мировоззрения современного специалиста электротехнического профиля. Он закладывает фундамент, на котором базируются все радиотехнические, электротехнические и энергетические дисциплины. Предметом курса ТОЭ является изучение качественных и количественных сторон электромагнитных явлений с целью глубокого понимания физики процессов и их практического использования.

Большинство электромагнитных устройств используют для своей работы электрический ток, с которым непосредственно связано переменное в пространстве и во времени электромагнитное поле. С математической точки зрения электромагнитные процессы описываются системой уравнений в частных производных (уравнения Максвелла). Однако в большинстве случаев точный анализ электромагнитных явлений на основе этих уравнений представляет очень сложную задачу. Поэтому возникает потребность в более простых методах анализа, которые позволяли бы с достаточной для инженерных расчетов точностью решать практические задачи.

В курсе ТОЭ используются два метода описания электромагнитных явлений: теория электромагнитного поля и теория электрических и магнитных цепей.

Теория поля имеет дело с векторными величинами и описывает электромагнитные явления во времени и в пространстве.

Теория электрических и магнитных цепей базируется на приближенной замене реального электротехнического устройства идеализированной моделью, для анализа которой вводятся такие интегральные величины, как ток, напряжение, электродвижущая сила, токодвижущая сила, изменение которых рассматривают только во времени. Таким образом, теория электрических и магнитных цепей отбрасывает из рассмотрения пространство, что значительно упрощает анализ, но отдаляет его от строгой физической основы.

Определение границ использования теории электрических цепей осуществляется с помощью теории поля.

- **Задачи курса, его структура, учебники и учебные пособия.**

Базируясь на диалектико-материалистической методологии, курс ТОЭ имеет целью развитие у студентов навыков абстрактного мышления, что позволяет решать задачи электротехники в самой общей постановке.

Курс ТОЭ ставит цель дать будущему инженеру глубокие физические представления об электромагнитных явлениях, научить его составлять схемы замещения реальных электротехнических устройств и их математические модели. Успешное усвоение курса ТОЭ закладывает основу для дальнейшего овладения студентами специальных дисциплин.

Курс теоретической электротехники непрерывно развивается, устаревший материал перерабатывается, появляются новые разделы, например, топологические методы, синтез электрических цепей, активные RC-фильтры и т.п. Соответственно возрастает объем информации, которую должны усвоить студенты. Поэтому в курсе ТОЭ предусмотрено деление его по специальностям, что разрешает более глубоко изучать необходимые для данной специальности разделы.

По своему содержанию курс ТОЭ делится на следующие части: линейные электрические цепи с сосредоточенными параметрами, нелинейные электрические и магнитные цепи, цепи с распределенными параметрами и теория электромагнитного поля.

В основе первых трех частей курса лежат четыре основных закона: закон Ома, первый и второй законы Кирхгофа, закон Джоуля-Ленца и основанные на них 6-7 методов расчета электрических цепей. По объему значительную часть курса (около 20%) занимают определения и обозначения физических величин, которые используются для описания электромагнитных явлений и их математических моделей. Этот материал надо учить наизусть, так как он является языком электротехники, без которого общаться по вопросам электротехники невозможно.

Стержнем всего курса ТОЭ является математика, с использованием которой излагаются все разделы курса. Особое внимание надо уделить свободному владению такими разделами математики, как матричная алгебра, решение систем линейных уравнений в вещественной и комплексной форме, решение дифференциальных уравнений, преобразование Фурье и Лапласа, функции комплексной переменной.

Курс ТОЭ имеет многолетнюю историю, которая нашла свое отражение в нескольких десятках учебников, как для средних, так и для высших учебных заведений.

- Наиболее приближенно к тексту лекций материал курса излагается в таких учебниках:

1. Бойко В.С., Бойко В.В., Видолуб Ю.В. та ін. Теоретичні основи електротехніки. – Київ: Політехніка, 2004. – 272 с.

2. Попов В.П. Основы теории цепей. -М.: Высш.шк., 1998. – 575 с.

3. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи. - М.: Высш.шк., 1984. – 559 с.
4. Зевеке Г.В., Ионкин П.А., Нетушил А.В., Страхов С.В.. Основы теории цепей. -М.: Энергоатомиздат, 1989. – 528 с.
5. ”Теория электрорадиотехнических цепей, ч.1 и ч.2”. Под ред. Д.С. Колобкова.- Харьков, ВИРТА, 1969, 1972 г.

▪ Рекомендованная методическая литература по курсу:

1. Теоретичні основи електротехніки. Частина I. Робоча програма, методичні вказівки і контрольні завдання з курсу / Фесенко Л.Д., Воейков А.М., Соскова І.О. – Харків, УПА, 2003.
2. Теоретичні основи електротехніки. Частина II. Робоча програма, методичні вказівки і контрольні завдання з курсу / Фесенко Л.Д., Соскова І.О. – Харків, УПА, 2003.
3. Практикум для организации самостоятельной работы студентов электротехнических специальностей по расчету цепей постоянного тока. Модуль 1. / Фесенко Л.Д., Черкашина З.С., Воейков А.Н. и др. – Харьков, УИПА, 1991.
4. Фесенко Л.Д., Соскова І.О. Теоретичні основи електротехніки. Електричні кола постійного струму. Модуль 1. Навчальний посібник. - Харків: УПА, 2009.
5. Практикум для организации самостоятельной работы студентов электротехнических специальностей по расчету цепей гармонического тока. Модуль 2. / Черкашина З.С., Фесенко Л.Д., Воейков А.Н., Соскова И.А. – Харьков, УИПА, 1999.
6. Фесенко Л.Д., Черкашина З.С., Соскова І.О. Теоретичні основи електротехніки. Гармонічний режим в електричних колах. Модуль 2: Навчально-методичний посібник. – Харків: УПА, 2003.

• **Короткая историческая справка.**

Электротехника - это действительно интернациональная область науки и техники, в развитие которой внесли свой вклад ученые и инженеры разных стран мира. Историю развития электротехники условно можно разделить на три этапа:

- 1-й этап заканчивается в середине 19-го столетия;
- 2-й этап охватывает вторую половину 19-го столетия и начало 20-го столетия;
- 3-й этап охватывает период от начала 20-го столетия до наших дней.

Первый этап характеризуется накоплением знаний по электромагнитным явлениям, разработкой средств количественного и качественного расчета этих явлений и средств их измерения.

Исследование электрических явлений в России началось в середине 18-го столетия выдающимися учеными академиком Петербургской академии наук М.В.Ломоносовым (1711-1765 г.), Г.В. Рахманом (1711 - 1753) и Т.У. Элинусом. Первый трактат по электричеству “Слово о явлениях воздушных, от электрической силы происходящих», который вышел в свет в 1753 г., принадлежит

М.В.Ломоносову. В своей оригинальной по тем временам теории атмосферных электрических явлений Ломоносов обосновал возможность защиты человека и зданий от поражения молнией путем создания громоотводов. В 1758 г. академик Элинус Т.У. предложил идею о связи между электрическими и магнитными явлениями, которая в дальнейшем была подтверждена теоретическими и практическими работами.

В 1799 г. итальянский физик Вольт изобрел гальванический элемент - первый источник напряжения, а через три года в 1802 г. русский физик профессор Медико-хирургической академии Петербурга В.В.Петров сконструировал мощный “Вольт-столб”, с помощью которого впервые в истории человечества получил искусственным путем электрическую дугу. Это было первое электрическое явление, которое нашло в дальнейшем применение на практике для освещения, плавки и сварки металлов.

За изобретением электрической дуги следовал ряд выдающихся изобретений, связанных с электрическим током и электромагнитным полем. Учеными Араго, Ампером, Омом, Эрстедом, Фарадеем исследованы свойства электрического тока, установлена связь между электрическим, магнитным, тепловым и химическим действием электрического тока, открыто явление термоэлектричества, установлено действие магнитного поля на световые лучи, законы механического взаимодействия электрических токов и магнитов. В 1831 г. Э.Х. Ленцем было открыто явление электромагнитной индукции, которое сыграло значительную роль в развитии теории электромагнетизма.

В 1845 г. немецким физиком Г.Кирхгофом были сформулированы основные законы разветвленных электрических цепей, которые имели большое значение для развития теоретической и практической электротехники.

Второй этап развития электротехники связан с началом широкого практического использования электричества. На протяжении длительного времени основным источником электроэнергии были гальванические батареи. Такие батареи, например, были использованы академиком Якоби для работы электродвигателя. Первый двигатель, разработанный им еще в 1838 г., был установлен на лодке, которая могла двигаться по Неве с большой скоростью.

Машинные генераторы постоянного тока были разработаны значительно позднее. Появление таких генераторов открыло широкий путь практическому использованию электроэнергии.

Первым таким направлением было электрическое освещение, начало которому положило изобретение П.Н. Яблочковым электрической свечи (1876 г.). Равномерность сгорания углей в свече обеспечивалась использованием переменного тока, который имел много преимуществ перед постоянным током за счет простоты передачи и распределения электрической энергии с помощью трансформатора, также разработанного П.Н.Яблочковым.

Переменный ток приобрел широкое распространение благодаря работам выдающегося ученого М.О. Доливо-Добровольского, который разработал и ввел в повседневное обращение трехфазные системы электропитания, трехфазные трансформаторы, двигатели и прочее.

Выдающимся событием в развитии теории электромагнитных явлений явилась двухтомная работа Дж.К.Максвелла “A Treatise on Electricity and Magnetism”, которая увидела мир в 1873 г. В этой работе он изложил строгую и целостную теорию электромагнитного поля, которая дополняла и развивала идеи Фарадея. Приведенные в работе знаменитые уравнения Максвелла и в наши дни остаются основой для анализа и понимания широкого класса вопросов, связанных с электромагнитными процессами.

Экспериментальное подтверждение теории Максвелла было осуществлено Г.Герцем в 1887-1889 гг. в его опытах по генерации электромагнитных волн.

В 1895 г. профессор А.С. Попов открыл новую страницу в культурной жизни человечества, изобретя радиосвязь. Бурное развитие радиосвязи стало толчком к дальнейшему изучению электромагнитных волн и выделению из электротехники нового направления - радиотехники.

Значительный вклад в теоретическую и практическую электротехнику внес гениальный английский ученый самоучка Оливер Хевисайд (1850-1925). Несмотря на то, что он впервые ввел операционный метод расчета электрических цепей, единичную $1(t)$ и дельта $\delta(t)$ -функции, векторный анализ и многое другое, его фундаментальная трехтомная работа “Электромагнитная теория”, которая вышла в свет на протяжении 1893-1912 годов, осталась не прочитанной. Не имея высшего университетского образования, он наработал свой научный язык, свой стиль постановки и решения научных проблем, свой математический аппарат, который был неприемлем для большинства его современников. Полученные Хевисайдом научные результаты очень часто используются другими учеными без всяких ссылок на их автора, а часть его результатов вообще приписывается другим.

Формирование курса “Теоретические основы электротехники” относится к концу 19-го столетия и началу 20-го столетия, когда проф. В.Ф. Миткевич начал читать курс “Теория электрических и магнитных явлений” в Петербургском политехническом институте. Годом позже профессор Московского высшего технического училища К.А.Круг начал читать курс “Теория переменных токов”, который со временем (1916 г.) стал основанием для первого в России учебника “Основы электротехники”.

Третий этап развития электротехники начинается приблизительно в 20-х годах 20-го столетия и связан с бурным развитием электроэнергетики, построением мощных тепловых и гидроэлектростанций и широким использованием электроэнергии во всех областях народного хозяйства. Производственные установки переводятся на электропривод, в больших городах развивается электротранспорт, появляются новые области, такие как электрометаллургия, электрохимия, связь, разрабатываются электрические приборы для измерения как электрических, так и неэлектрических величин. Электроэнергия начинает широко использоваться в повседневном быту. Вместе с тем на базе электротехники развиваются новые направления исследований, которые со временем сформировались как самостоятельные области технических наук: радиотехника и электроника, электродинамика, электроэнергетика, электрические машины и аппараты,

электропривод и автоматические системы управления, электронно-вычислительная техника, электрические измерения и прочее.

Широкое развитие получила общая теория линейных и нелинейных электрических цепей и теория электромагнитного поля. Были разработаны новые методы расчета электромагнитных полей, вопросы взаимодействия заряженных частиц с электромагнитным полем, проведены исследования электромагнитных процессов в разных средах.

Рассматривая в наиболее широкой постановке физические процессы, как в электрических цепях, так и в электромагнитных полях конкретных электротехнических устройств, теоретические основы электротехники остаются базовой дисциплиной для формирования мировоззрения специалистов электротехнического направления и фундаментом для овладения ими всеми без исключения специальными и технологическими дисциплинами электротехнического профиля.

- **Новые направления развития курса ТОЭ.**

Современный этап научно-технического прогресса характеризуется революционными изменениями в передаче, обработке и использовании информации на базе современной электронно-вычислительной техники. Под их влиянием происходят значительные преобразования в целом ряде научных направлений, в том числе и теоретической электротехнике.

Доминирующие цифровые методы обработки информации, которые реализуются цифровыми процессорами, привели к внедрению методов дискретной математики в теоретические основы электротехники. Развиваются топологические методы анализа электрических цепей, методы координат состояния, внедряется аппарат матричной алгебры, разрабатываются новые методы расчета нелинейных электрических цепей переменного тока.

В этих условиях от специалистов электромеханического профиля требуется широта представлений, глубокое понимание основных закономерностей процессов, присущих электромагнитным устройствам, в основе изучения которых лежит курс “Теоретические основы электротехники”.

РАЗДЕЛ 1

ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Лекция 1

План лекции:

- 1.1. Основные понятия, определения и обозначения теории электрических цепей.
- 1.2. Элементы электрических цепей.

1.1. Основные понятия, определения и обозначения теории электрических цепей.

В общем случае точное решение задач, описывающих электромагнитные процессы в реальных устройствах, возможно лишь на основе уравнений теории поля. Теория поля рассматривает электромагнитные явления в каждой точке пространства, исследует их изменение, как в пространстве, так и во времени. Однако строгое рассмотрение электромагнитных процессов в большинстве случаев представляет собой очень сложную задачу.

Для практического использования достаточным оказался другой подход, в основе которого лежит замена реального электромагнитного устройства некоторой моделью, называемой электрической цепью.

Теория цепей рассматривает процессы только во времени и имеет дело не с реальными электромагнитными устройствами, а с их моделями. Эти модели описываются с помощью схем замещения, для построения которых используются идеализированные схемные элементы.

Для построения модели вводится ряд понятий, определений и обозначений, на основе которых будет базироваться теория электрических и магнитных цепей.

Электрическая цепь – это совокупность устройств, предназначенных для прохождения электрического тока, электромагнитные процессы в которых можно описать с помощью таких понятий как ток, напряжение, электродвижущая сила.

Схема – это графическое изображение электрической цепи, показывающее последовательность соединения отдельных элементов.

В курсе ТОЕ при расчете электрических цепей используются, в основном, схемы замещения, поэтому в дальнейшем в процессе изложения материала мы будем иметь дело только с расчетными схемами замещения.

Электрический ток (имеется в виду ток проводимости) – это направленное движение зарядов. Численное значение тока определяется количеством заряда, который проходит через поперечное сечение проводника за одну секунду

$$i = \frac{dq}{dt}.$$

Маленькой буквой $i(t)$ или сокращенно i обозначается мгновенное значение переменного тока, большой буквой I – постоянный ток или действующее значение переменного тока. Единица измерения тока $[i] = \text{А}$ (ампер). Производные единицы - мА, мкА, кА и т.д.

За **действительное направление тока** принято направление движения положительных зарядов.

На схемах действительное направление тока указывается стрелкой без просвета непосредственно на изображении соединительных проводников (рис. 1.1).

При расчетах или измерениях токов в сложных цепях во многих случаях не возможно заранее указать действительные направления токов. Поэтому перед расчетом или измерением направления токов на схеме указывают произвольным образом.

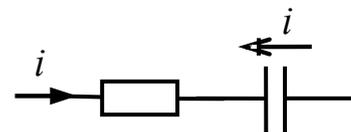


Рис. 1.1

Произвольно выбранные направления токов условно называют **положительными направлениями**. На схемах положительные направления указываются стрелкой с просветом над элементами или над соединительными проводниками (рис. 1.1, 1.2).

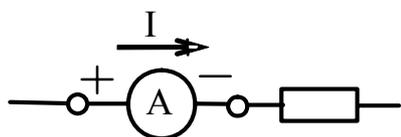


Рис. 1.2

Для измерения постоянного тока разрывают ветвь, в которой необходимо определить ток, и в разрыв ветви с учетом положительного направления тока включают амперметр. Плюс амперметра подключают к зажиму, который соответствует началу стрелки, минус - концу стрелки (рис. 1.2).

Показание амперметра записывают с тем знаком, который он дает. Если в результате измерения или расчета ток будет иметь знак минус, то это значит, что действительное направление тока противоположно положительному направлению.

Примером того, как теория поля используется для обоснования величин теории электрических цепей, является электрическое напряжение.

Электрическое напряжение - скалярная величина, равная линейному интегралу напряженности электрического поля вдоль заданного пути. Малой буквой $u(t)$ или сокращенно u обозначается мгновенное значение переменного напряжения, большой буквой U – постоянное напряжение или действующее значение переменного напряжения

$$u_{ab} = \int_a^b \vec{E} d\vec{\ell}.$$

Очень часто определение напряжения дают с помощью другой физической величины, присущей полю - электрического потенциала.

Электрический потенциал φ_a произвольной точки a электрического поля численно равен работе сил электрического поля по перемещению единичного положительного заряда из данной точки пространства в бесконечность (потенциал бесконечности условно принят за нуль).

Разность потенциалов точек a и b называется электрическим напряжением между этими точками

$$u_{ab} = \varphi_a - \varphi_b.$$

Теория электрических цепей, являясь приближенной теорией, не оперирует с пространством, потому использовать дифференциальную величину (потенциал точки пространства) в теории электрических цепей не логично. В теории цепей напряжение рассматривается между двумя точками электрической цепи, не связанной с пространством. Единица измерения напряжения $[u] = \text{В}$ (вольт) и производные – мВ, мкВ, кВ и т.д.

Напряжение является скалярной величиной, которой приписывается определенное направление.

За **действительное направление напряжения** принято направление, в котором бы двигались положительные заряды от одной точки электрической цепи к другой, т.е. направление от точки с большим потенциалом к точке с меньшим потенциалом.

На участках электрической цепи, которые не содержат источников энергии, движение носителей заряда осуществляется за счет энергии электрического поля, поэтому направления напряжения и тока совпадают.

Внутри источников электрической энергии носители заряда под влиянием сил неэлектрической природы двигаются в направлении, противоположном действию сил электрической природы. Таким образом, направление тока в источнике энергии противоположно направлению напряжения.

Произвольно выбранные направления напряжения условно называют **положительными направлениями**.

Положительные направления напряжения могут задаваться порядком индексов, например U_{12} или U_{ab} , который означает, что напряжение направлено от точки 1 к точке 2 или от a к b .

$$\text{Поэтому } U_{12} = -U_{21} \text{ или } U_{ab} = -U_{ba}.$$

На схемах положительные направления напряжения могут указываться стрелками без просвета. Если на схеме указаны положительные направления тока в элементах, то считается, что положительные направления напряжения и тока в них совпадают.

При измерениях плюс вольтметр подключается к точке, соответствующей первой цифре индекса напряжения, а минус – ко второй точке. Если в результате измерений или расчетов напряжение будет иметь знак минус, то это значит, что действительное направление напряжения противоположно положительному.

В потенциальном электрическом поле заряды разных знаков стараются сблизиться под влиянием кулоновских сил притяжения. Вследствие их столкновений происходит взаимная компенсация зарядов и все электрические процессы прекращаются.

Поэтому для работы электротехнических устройств необходимы процессы, которые бы вопреки кулоновским силам разъединяли заряды разных знаков. Без этих сторонних сил (сил неэлектрической природы) электромагнитные

явления не могли бы существовать, как не существовало бы рек, если бы движение воды происходило лишь за счет сил тяготения.

Под **электродвижущей силой** (ЭДС) будем понимать напряжение, возникающее за счет работы сторонних сил по разделению зарядов разных знаков.

ЭДС численно определяется как работа сторонних сил по перемещению единичного положительного заряда внутри ненагруженного источника энергии от его минуса к плюсу.

Независимо от природы сторонних сил ЭДС источника энергии численно равняется напряжению на зажимах источника при отсутствии в нем тока.

Малой буквой $e(t)$ или e обозначается мгновенное значение переменной ЭДС, большой буквой E – постоянная ЭДС или действующее значение переменной ЭДС.

Единица измерения ЭДС $[e] = \text{В}$ (вольт).

Сторонние силы способны не только разделять заряды разных знаков и создавать напряжение, но и непосредственно создавать электрический ток. Например, если взять за один конец металлический стержень, поднять его на достаточную высоту над твердой поверхностью, а затем отпустить, то электроны (основные носители зарядов в металлах) вместе со стержнем приобретут кинетическую энергию, за счет которой при ударе о поверхность они придут в движение в направлении этой поверхности, создавая, таким образом, электрический ток.

Под **токодвижущей силой** (ТДС) источника энергии будем понимать ток, который возникает за счет работы сторонних сил по созданию направленного движения зарядов.

Независимо от природы сторонних сил ТДС источника энергии численно равняется току через источник при закороченных зажимах.

Малой буквой $j(t)$ или j обозначается мгновенное значение переменной ТДС, большой J – постоянная ТДС или действующее значение переменной ТДС.

Единица измерения ТДС $[j] = \text{А}$ (ампер).

При перемещении электрического заряда dq из одной точки электрической цепи в другую, если напряжение между точками равняется u , силы электрического поля выполняют элементарную работу

$$dw = udq = uidt .$$

Энергия, которую получила (израсходовала) электрическая цепь к моменту времени t , определяется интегралом

$$w(t) = \int_{-\infty}^t uidt .$$

Если $w(t) > 0$, то считают, что электрическая цепь потребляет энергию, если $w(t) < 0$, то электрическая цепь отдает энергию источнику.

Производная энергии по времени есть **мгновенная мощность**

$$p(t) = \frac{dw}{dt} = u \cdot i.$$

Если в данный момент направления тока и напряжения совпадают, то $p(t) > 0$ и цепь потребляет или накапливает энергию. Если направления тока и напряжения – противоположные, то $p(t) < 0$ и цепь отдает электрическую энергию.

Таким образом, энергия

$$w(t) = \int_{-\infty}^t p(t) dt.$$

Единица измерения мощности $[p] = \text{Вт}$ (ватт) и производные - мВт, кВт и т.д.

Единица измерения энергии $[w] = \text{Дж}$ (джоуль) и производные - мДж, кДж и т.д.

1.2. Элементы электрических цепей.

Реальные электромагнитные устройства состоят из источников энергии, в которых неэлектромагнитная энергия превращается в электромагнитную (активные элементы), и приемников энергии, в которых электромагнитная энергия может накапливаться в виде энергии электрического или магнитного поля, или превращаться в другие виды энергии: механическую, тепловую, химическую и т.п. (пассивные элементы).

В электрических цепях, которые, как известно, являются адекватной моделью реального электромагнитного устройства, обозначенные выше явления отображаются в виде **пяти идеализированных схемных элементов**: двух активных элементов и трех пассивных.

Пассивные элементы делятся на линейные и нелинейные. Элемент называется **линейным**, если параметр, который его характеризует, не зависит от величины тока, протекающего через него, напряжения на его зажимах или их направлений. В противном случае элемент называется **нелинейным**.

Примеры нелинейных элементов: электрическая лампа, катушка индуктивности с ферромагнитным сердечником, конденсатор с сегнетоэлектриком, полупроводниковый элемент и т.п.

Если параметры элементов R , L , C изменяются под влиянием внешних факторов, то такие элементы называют переменными резисторами, конденсаторами с переменной емкостью, варикапами. Это линейные элементы.

Зависимость напряжения на элементе от тока, который протекает через него, или наоборот называется **вольт-амперной характеристикой (ВАХ)** элемента.

Для линейных элементов вольт-амперные характеристики линейные, для нелинейных - нелинейные. Ограничимся пока что рассмотрением линейных пассивных элементов.

- **Резистивным элементом** или просто **сопротивлением** называют элемент электрической цепи, который отражает необратимый процесс поглощения или рассеяния электромагнитной энергии.

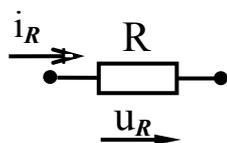


Рис. 1.3. Графическое изображение резистивного элемента

На схемах резистивный элемент обозначается, как показано на рис. 1.3.

Параметр, которым характеризуется резистивный элемент, есть его сопротивление R . Таким образом, одним и тем же термином “сопротивление” будем называть как сам идеализированный схемный элемент, так и его параметр.

Для линейных элементов величина сопротивления определяется по закону Ома

$$R = \frac{u}{i}$$

Единица измерения сопротивления $[R] = \text{Ом}$ и производные – кОм, МОм и т.д.

Очень часто приходится иметь дело с величиной, обратной сопротивлению, которая называется проводимостью и обозначается буквой G

$$G = \frac{1}{R}$$

Единица измерения проводимости $[G] = \frac{1}{\text{Ом}} = \text{См}$ (сименс).

На схемах проводимость изображается так же, как и сопротивление, и имеет те же самые свойства. Связь между током и напряжением в сопротивлении и проводимости имеет вид

$$u = Ri, \quad i = \frac{u}{R} \quad \text{и} \quad i = Gu, \quad u = \frac{i}{G}$$

- **Емкостным элементом** или просто **емкостью** называется элемент электрической цепи, который отражает процесс накопления энергии только электрического поля.

На схемах емкостной элемент обозначается, как показано на рис. 1.4.

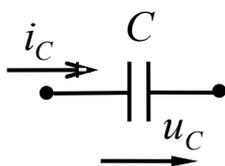


Рис. 1.4. Графическое изображение емкостного элемента (емкости)

Параметр, которым характеризуется емкостной элемент, есть его емкость C .

Опять таки, одним и тем же термином “емкость” будем называть как сам идеализированный схемный элемент, так и его параметр.

Для линейных элементов величина емкости определяется как отношение заряда к напряжению на этом элементе

$$C = \frac{q}{u_C}$$

Единица измерения емкости $[C] = \text{Ф}$ (фарада) и производные – мкФ, нФ, пФ и т.д.

Изменение заряда на емкости сопровождается током

$$i_C = \frac{dq}{dt} = \frac{d(Cu_C)}{dt} \Big|_{C=const} = C \frac{du_C}{dt}.$$

Таким образом, связь между током и напряжением в емкости имеет вид:

$$i_C = C \frac{du_C}{dt}, \quad u_C = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C dt.$$

В цепях постоянного тока емкость эквивалентна разрыву цепи, т.е. она не работает.

Работа емкости в цепи переменного тока заключается в том, что в один промежуток времени она накапливает энергию электрического поля, в другой - отдает. Потерь энергии при этом в емкости нет.

• **Индуктивным элементом** или просто **индуктивностью** называется элемент электрической цепи, который отражает процесс накопления энергии только магнитного поля.

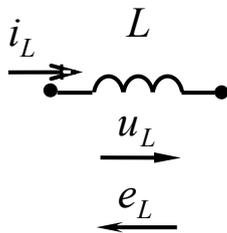


Рис. 1.5. Графическое изображение индуктивного элемента

На схемах индуктивный элемент обозначается, как показано на рис. 1.5.

Параметр, которым характеризуется индуктивный элемент, есть его индуктивность L . Термином “индуктивность” будем называть как идеализированный элемент электрической цепи, так и его параметр.

Для линейных элементов индуктивность определяется как отношение потокосцепления самоиндукции элемента к току в этом элементе

$$L = \frac{\Psi}{i}.$$

Единица измерения индуктивности $[L] = \text{Гн}$ (генри) и производные – мГн, мкГн.

Из курса физики известно, что потокосцеплением катушки Ψ называется сумма магнитных потоков сквозь поверхности, которые окружают витки катушки. Если магнитные потоки Φ всех витков одинаковые, то потокосцепление

$$\Psi = n\Phi,$$

где n - число витков.

Согласно закону электромагнитной индукции изменение во времени потокосцепления самоиндукции вызывает появление ЭДС самоиндукции e_L

$$e_L = -\frac{d\Psi}{dt} = -\frac{d(Li)}{dt} \Big|_{L=const} = -L \frac{di}{dt} = -u_L.$$

Величину $L \frac{di}{dt} = u_L$ называют напряжением на индуктивности. Из данного определения вытекает, что напряжение на индуктивности и ЭДС самоиндукции имеют противоположное направление

$$u_L = -e_L.$$

Таким образом, связь между током и напряжением в индуктивности имеет вид

$$u_L = L \frac{di}{dt}, \quad i = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u_L dt.$$

В цепях постоянного тока индуктивность эквивалентна короткому замыканию, т.е. не работает. Работа индуктивности в цепи переменного тока состоит в том, что в один промежуток времени, когда ток возрастает, индуктивность накапливает энергию магнитного поля, в другой, когда ток уменьшается, - отдает энергию. Потерь энергии в индуктивности при этом нет.

Если часть магнитного потока одного индуктивного элемента пересекает витки второго индуктивного элемента (рис. 1.6), то эти два элемента кроме параметров L_1 и L_2 характеризуются еще параметром M , который имеет название взаимной индуктивности. Параметр M определяется как отношение потокосцепления витков первого элемента, которое обусловлено магнитным потоком второго элемента, к току второго элемента

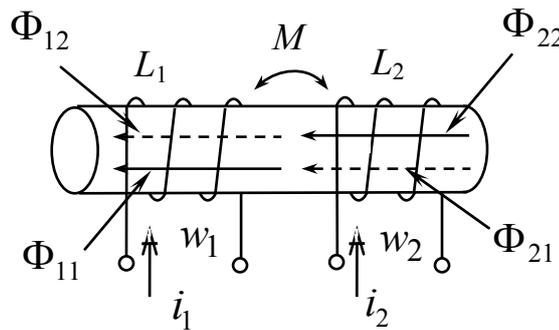


Рис. 1.6

$$M_{12} = \frac{\psi_{12}}{i_2}, \quad M_{21} = \frac{\psi_{21}}{i_1}.$$

Для линейных элементов $M_{12} = M_{21} = M$.

Единица измерения взаимной индуктивности, как и просто индуктивности, есть генри.

При изменении токов i_1 и i_2 в первом и втором индуктивных элементах наводятся электродвижущие силы взаимной индукции

$$e_{12} = -\frac{d\psi_{12}}{dt}, \quad e_{21} = -\frac{d\psi_{21}}{dt}.$$

Для линейных элементов

$$e_{12} = -M \frac{di_2}{dt}, \quad e_{21} = -M \frac{di_1}{dt}.$$

Следует отметить, что взаимная индуктивность M характеризует не самостоятельный элемент электрической цепи, а лишь магнитную связь между индуктивными элементами.

Реальные пассивные элементы, которые можно увидеть глазами, подержать в руках, называются соответственно резистор, конденсатор и катушка индуктивности. Каждый из них в той или иной мере обладает свойствами всех трех идеализированных схемных элементов: сопротивления, емкости, индуктивности и может быть представлен на схемах совокупностью этих элементов.

Например, схема замещения катушки индуктивности представлена на рис. 1.7.

На практике конденсаторы и резисторы изготавливают таким образом, что на рабочих частотах они близки к идеальным, в то время как катушки индуктивности за счет провода, которым они намотаны, обязательно имеют внутреннее сопротивление R . Межвитковая емкость C начинает влиять на высоких частотах.

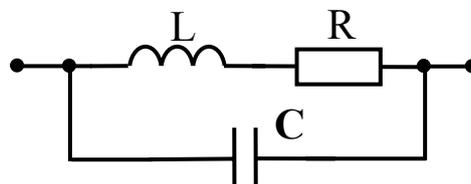


Рис. 1.7. Схема замещения катушки индуктивности

В теории электрических цепей используют два идеализированных источника электрической энергии: источник электродвижущей силы и источник токодвижущей силы, или как принято в литературе - идеальный источник тока.

Дадим определение идеализированных источников электрической энергии.

- **Источник ЭДС** – это элемент с двумя выводами, напряжение на которых равняется E или $e(t)$ и не зависит от тока, который протекает через него, причем внутреннее сопротивление элемента $R_g = 0$.

На схемах источник ЭДС изображается, как показано на рис. 1.8.

Внутри источника ЭДС под влиянием сторонних сил положительные заряды перемещаются от “минуса” к “плюсу”, что отвечает направлению ЭДС. Таким образом, внутри источника напряжение и ЭДС направлены противоположно.

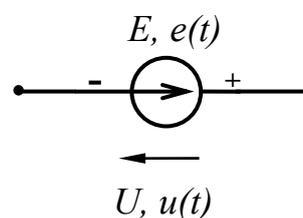


Рис. 1.8

Вольт-амперная характеристика источника ЭДС показана на рис. 1.9.

Источник ЭДС – является идеализированным схемным элементом бесконечной мощности. В природе таких источников нет.

Из определения источника ЭДС следует, что режим короткого замыкания для него не имеет смысла и не рассматривается (рис. 1.10).

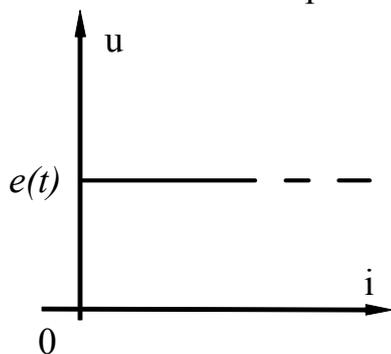


Рис. 1.9. ВАХ источника ЭДС

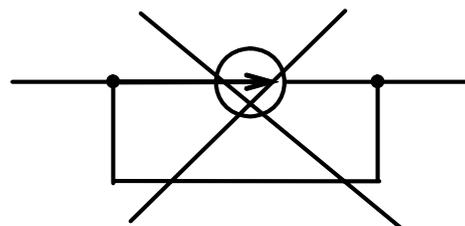


Рис. 1.10

- **Источник ТДС** (идеальный источник тока) – это элемент с двумя выводами, ток через который равняется J или $j(t)$ и не зависит от напряжения на его выводах, причем внутреннее сопротивление элемента $R_g = \infty$.

На схемах источник ТДС изображается, как показано на рис. 1.11.

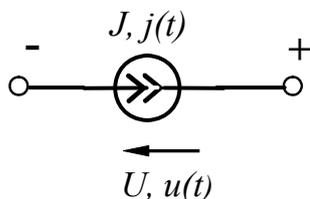


Рис. 1.11

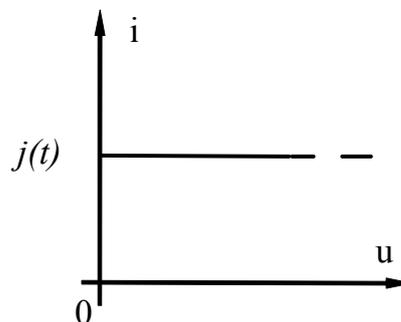


Рис. 1.12. ВАХ источника ТДС

Две стрелки указывают направление тока внутри источника, который создается сторонними силами.

Из определения источника ТДС следует, что холостой ход источника не имеет смысла и не рассматривается.

Вольт-амперная характеристика источника ТДС показана на рис. 1.12.

Как и источник ЭДС, источник ТДС является идеализированным схемным элементом бесконечной мощности, которого в природе также не существует.

Таким образом, мы ввели в рассмотрение пять идеализированных схемных элементов – три пассивных R, L, C и два активных – источник ЭДС и источник ТДС. Ни один из пяти идеализированных элементов нельзя получить никакой комбинацией оставшихся четырех.

Ничем нельзя заменить ни источник ЭДС, ни источник ТДС, ни другие идеализированные элементы.

Реальные источники электрической энергии имеют конечное внутреннее сопротивление, конечную мощность и могут быть представлены двумя равноценными схемами замещения - источником напряжения (рис. 1.13) и источником тока (рис. 1.14).

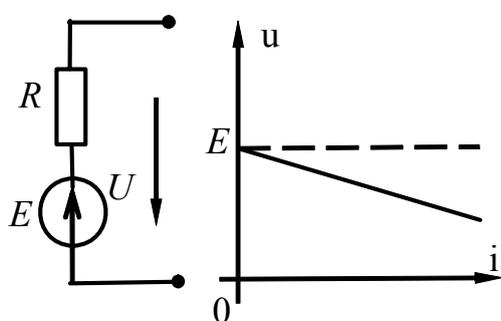


Рис. 1.13. Источник напряжения и его ВАХ

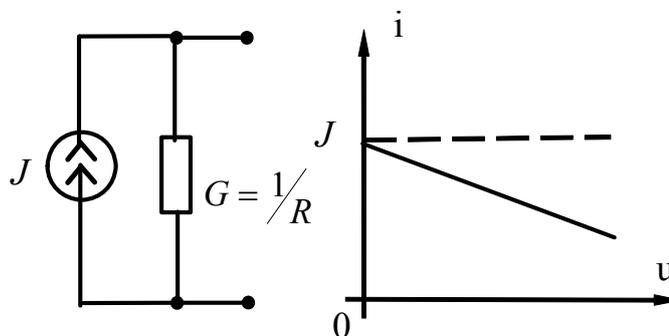


Рис. 1.14. Источник тока и его ВАХ

Последовательное соединение источника ЭДС и сопротивления будем называть источником напряжения, а параллельное соединение источника ТДС и

проводимости (сопротивления) - источником тока. Такие определения схем замещения реальных источников электрической энергии не противоречат терминологии, которая используется в практической деятельности.

Вследствие конечной мощности реальных источников энергии их ВАХ являются наклонными прямыми, которые пересекают координатные оси в двух характерных точках, отвечающих двум режимам – холостому ходу и короткому замыканию.

Поскольку источник напряжения и источник тока являются схемами замещения одного и того же реального источника энергии, то от схемы источника напряжения легко перейти к схеме источника тока и наоборот.

Преобразование электрической цепи, при котором напряжение и ток на внешних зажимах цепи остаются неизменными, называется эквивалентным.

Например, переход от источника постоянного напряжения к источнику тока осуществляется по выражениям:

$$J = \frac{E}{R}; \quad G = \frac{1}{R},$$

а обратный переход:

$$E = \frac{J}{G} = JR; \quad R = \frac{1}{G}.$$

Лекция 2

План лекции:

- 1.3. Топологические понятия в электрических цепях.
- 1.4. Классификация электрических цепей.
- 1.5. Основные законы теории электрических цепей.

1.3. Топологические понятия в электрических цепях.

Схема электрической цепи определяет состав пассивных и активных идеализированных схемных элементов, моделирующих реальную цепь в пределах данной задачи, параметры этих элементов и способы их соединения между собой.

При изображении схем считается, что соединительные проводники элементов и места их соединения не обладают сопротивлением, индуктивностью и емкостью.

Способы изображения схемных элементов и их взаимное расположение на схеме не влияют на характер физических процессов в цепи.

Внешние выводы элементов и отдельных частей цепи называют полюсами. В зависимости от числа полюсов элементы и части цепей делятся на двухполюсники и многополюсники (трехполюсники, четырехполюсники). Путем соединения двухполюсников и многополюсников образовывается электрическая цепь.

В зависимости от характера соединения идеализированных двухполюсников различают неразветвленные и разветвленные электрические цепи. В неразветвленной цепи все элементы соединены последовательно и через них протекает один и тот же ток.

Соединение идеализированных двухполюсников, при котором напряжение на всех элементах одинаковое, называется параллельным.

Разветвленная электрическая цепь состоит из последовательно и параллельно соединенных элементов и имеет не менее трех различных токов. Такое соединение элементов называют смешанным.

Соединение элементов, которое изображено на рис. 1.15,а называется соединением треугольником, а на рис. 1.15,б - соединением звездой.

Но надо понимать, что в большинстве случаев элементы соединены более сложным способом: ни последовательно, ни параллельно, ни треугольником, ни звездой.

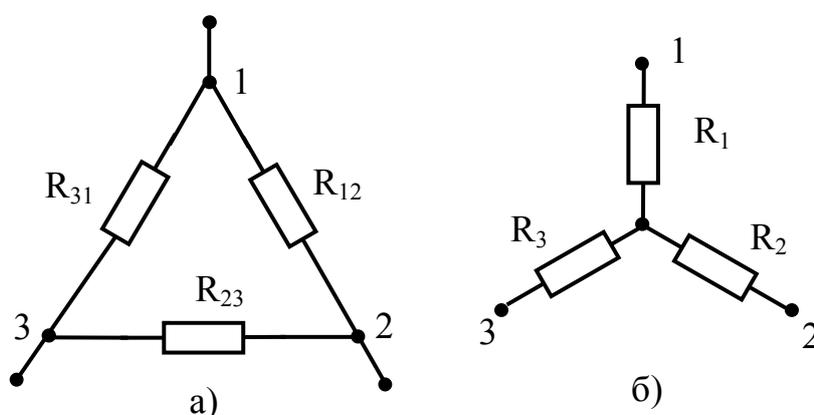


Рис. 1.15. Соединения элементов треугольником и звездой

Характер соединения идеализированных схемных элементов определяет топологические (структурные) свойства цепи, для описания которых используются такие понятия как ветвь, узел, контур.

Ветвь – это участок электрической цепи, который состоит из одного или нескольких последовательно соединенных элементов, ток вдоль которого в любой момент времени имеет одно и то же значение (рис. 1.16).

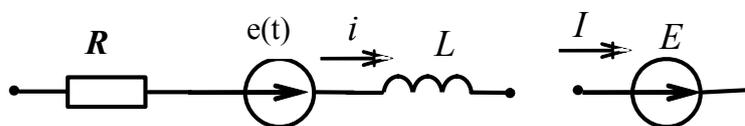


Рис. 1.16. Ветви электрической цепи

Узел электрической цепи – это место соединения трех и более ветвей. На схемах узел обозначается жирной точкой (рис. 1.17,а), если к нему подходит только три ветви, или несколькими точками в случае подсоединения к узлу многих ветвей (рис. 1.17,б).

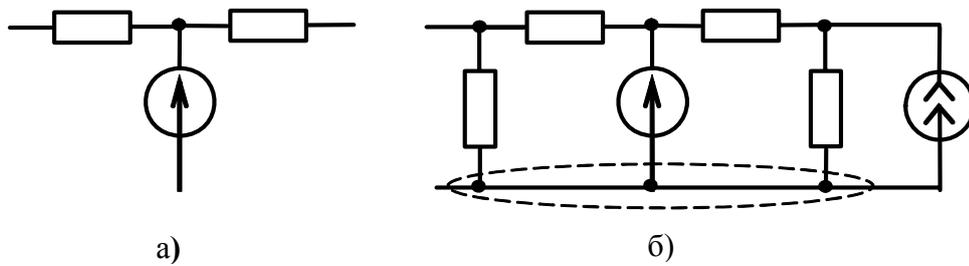


Рис. 1.17

Ветви между собой отделяются узлами, а узлы между собой отделяются ветвями.

Ветви, которые присоединены к одной паре узлов, называются параллельными (рис. 1.18).

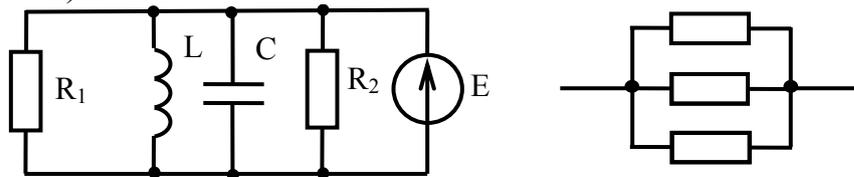


Рис. 1.18. Параллельные ветви

Контур электрической цепи – это любой замкнутый путь, проходящий через ряд ветвей и узлов.

Контура делятся на простые и сложные. Простые контура не включают в себя других контуров.

На рис. 1.19 приведен пример схемы разветвленной электрической цепи. Данная цепь содержит 5 узлов, 9 ветвей и 5 простых контуров. Будет ли линия соединения 1–1' ветвью? Нет, не будет, так как между этими точками схемы нет элементов, а точки 1 и 1' - это один узел.

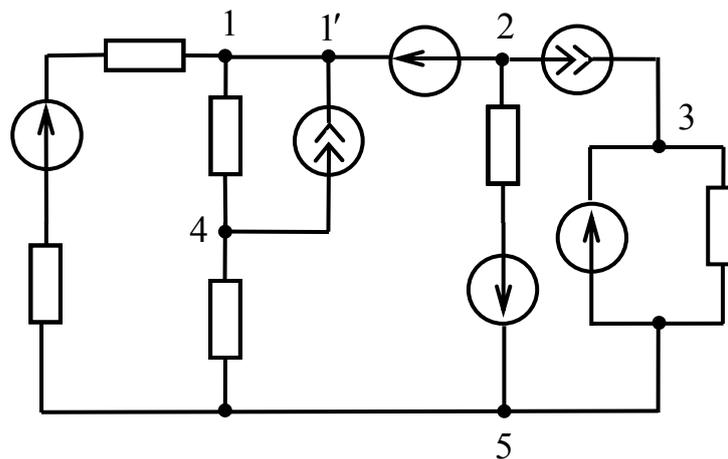


Рис. 1.19. Схема разветвленной электрической цепи

1.4. Классификация электрических цепей.

Классифицировать электрические цепи можно по разным признакам: простые и сложные, пассивные и активные, с постоянными и переменными параметрами и так далее. Однако наиболее фундаментальный характер имеет классификация в зависимости от вида дифференциального уравнения цепи.

Электрическая цепь, которая состоит лишь из линейных элементов и описывается линейными дифференциальными уравнениями, называется **линейной**.

Если цепь содержит хотя бы один нелинейный элемент, она описывается нелинейными дифференциальными уравнениями и называется **нелинейной**.

Различают цепи с сосредоточенными параметрами, и цепи с распределенными параметрами.

В цепях с сосредоточенными параметрами процессы накопления и преобразования электромагнитной энергии происходят лишь в пассивных элементах, которые не имеют пространственной протяженности (геометрические размеры элементов и цепей не учитываются). Ток во всех точках неразветвленных участков такой цепи можно считать одинаковым для данной ветви в любой момент времени, а параметры пассивных элементов R , L , C – интегральными величинами. Процессы в таких цепях описываются обычными дифференциальными уравнениями.

Если длина волны электромагнитных колебаний соизмерима с размерами устройства, то локализовать в пространстве участки, в которых имеют место процессы накопления и преобразования электромагнитной энергии, невозможно. Ток в любых точках ветви зависит не только от времени, но и от пространства (места этих точек вдоль ветви), а сами цепи характеризуются удельными параметрами на единицу длины. Такие цепи называют цепями с распределенными параметрами, а процессы в них описываются дифференциальными уравнениями в частных производных.

В зависимости от частоты одна и та же цепь может рассматриваться как цепь с сосредоточенными или распределенными параметрами. Строгой границы здесь нет.

В дальнейшем в первой части курса будем рассматривать лишь линейные электрические цепи с сосредоточенными параметрами.

1.5. Основные законы теории электрических цепей.

• Закон Ома.

Закон Ома (1826 г.) связывает между собой ток и напряжение в линейном сопротивлении: ток в сопротивлении прямо пропорционален приложенному напряжению (рис. 1.20).

$$\text{Для постоянного тока } I = \frac{U}{R} = GU.$$

$$\text{Для переменного } i(t) = \frac{u(t)}{R} = Gu(t).$$

$$\text{Для линейных элементов } R = \frac{U}{I} = \operatorname{tg} \alpha \frac{m_U}{m_I} \text{ и ВАХ резистивного элемен-}$$

та есть прямая линия (рис. 1.21). Здесь m_U и m_I - масштабы по осям напряжения и тока.

Сопротивления нелинейных резистивных элементов являются функциями тока или напряжения $R(i, u)$ и ВАХ имеет нелинейный характер.

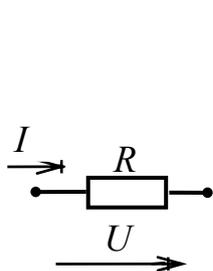


Рис. 1.20

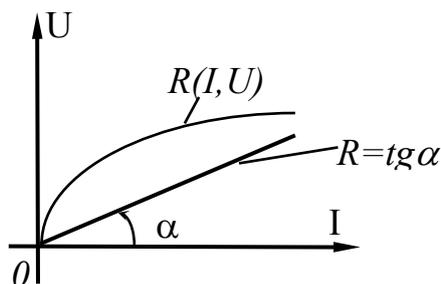


Рис. 1.21

• **Первый закон Кирхгофа.**

Следует отметить, что сам Кирхгоф называл свои открытия - правилами. Такие названия сохранились в курсе физики.

Алгебраическая сумма токов в узле электрической цепи равна нулю

$$\sum_{k=1}^n i_k = 0.$$

Первый закон Кирхгофа утверждает, что электрический заряд не может накапливаться в узле: количество заряда в единицу времени, которое подходит к узлу, должно равняться количеству заряда, которое отходит от узла.

Токи, которые направлены к узлу, будем брать со знаком плюс, от узла – со знаком минус. Например, для узла, приведенного на рис. 1.22, первый закон Кирхгофа имеет вид

$$i_1 - i_2 - i_3 + i_4 - i_5 = 0.$$

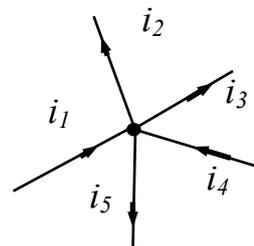


Рис. 1.22

Первый закон Кирхгофа справедлив также для так называемого сложного (обобщенного) узла, под которым понимают часть электрической цепи, которая окружена замкнутой линией. Так для сложного узла рис. 1.23 первый закон Кирхгофа записывается в виде:

$$I_1 - I_2 + I_3 = 0.$$

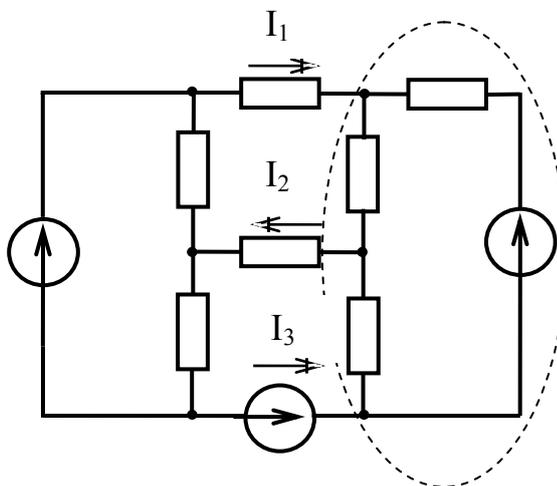


Рис. 1.23

• **Второй закон Кирхгофа.**

Для удобства использования в каждом конкретном случае дадим несколько формулировок второго закона Кирхгофа.

Первая формулировка.

Алгебраическая сумма напряжений на всех элементах замкнутого контура равна нулю

$$\sum_k u_k = 0.$$

Направление обхода контура берется произвольно. Если положительное направление напряжения совпадает с направлением обхода, напряжение берется со знаком “+”, если нет - со знаком “-”.

Вторая формулировка.

Алгебраическая сумма ЭДС в замкнутом контуре равна алгебраической сумме напряжений на всех элементах контура

$$\sum_k e_k = \sum_n u_n.$$

Для физически разомкнутого контура (не замкнутого) второй закон Кирхгофа можно сформулировать так: алгебраическая сумма ЭДС вдоль замкнутого пути обхода равна алгебраической сумме напряжений на всех элементах этого пути, включая напряжения между разомкнутыми точками электрической цепи

$$\sum_k e_k = \sum_n u_n + u_{12} + u_{34} + \dots$$

Участки цепи 1-2, 3-4... - разомкнутые или считаются разомкнутыми (между точками схемы 1-2 и 3-4 могут быть несколько элементов или несколько веток электрической цепи).

Приведем примеры записи второго закона Кирхгофа.

Для схемы (рис. 1.24) второй закон Кирхгофа для внешнего контура в первой формулировке имеет вид

$$U_{12} + U_{23} + U_{34} + U_{45} + U_{56} + U_{61} = 0.$$

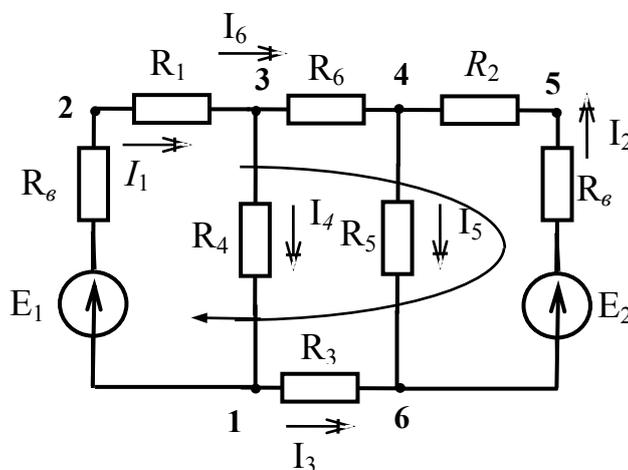


Рис. 1.24

Для этого же контура по второй формулировке закона можно записать

$$E_1 - E_2 = R_{e1} I_1 + R_1 I_1 + R_6 I_6 - R_2 I_2 - R_{e2} I_2 - R_3 I_3.$$

Запишем второй закон Кирхгофа для физически разомкнутого контура (рис. 1.25), который является частью сложной электрической цепи. Для этого выберем замкнутый путь обхода $abcdea$ и укажем направление его обхода.

Далее укажем положительные направления токов в тех ветвях, где они не заданы. Зажимы 1-2 и 3-4 - разомкнутые, поэтому ток на участках ab и cd равняется нулю и здесь не надо указывать положительные направления. Ветвь bc содержит источник ТДС J_6 и, согласно определению ТДС, ток в этой ветви равняется J_6 и имеет направление (согласно стрелкам) от точки "b" к точке "c".

Для того чтобы учесть напряжение на источнике ТДС J_6 , обозначим его выводы точками 5 и 6. Тогда второй закон Кирхгофа будет иметь вид

$$E_8 - E_7 - E_6 - E_4 - E_3 + E_2 = U_{12} + R_7 J_6 + U_{56} + R_6 J_6 + U_{34} - R_3 I_3 + R_1 I_1.$$

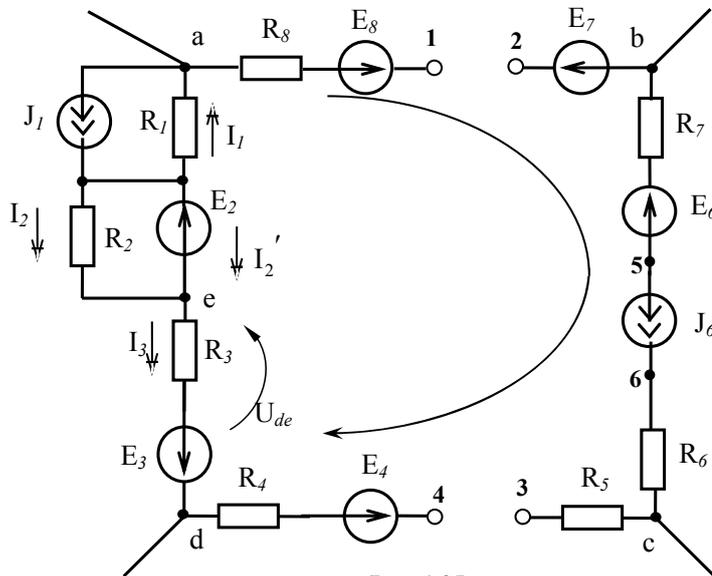


Рис. 1.25

Второй закон можно записать даже для ветви или ее части, если замкнуть ее соответствующим напряжением.

Например, для участка de , обходя его по току I_3 , можно записать

$$E_3 = R_3 I_3 + U_{de}.$$

Отсюда легко получить выражение для тока I_3

$$I_3 = \frac{E_3 - U_{de}}{R_3},$$

которое часто называют законом Ома для участка цепи, содержащего источник ЭДС.

• **Закон Джоуля-Ленца (1844 г.).**

Рассмотрим мощность и энергию для каждого идеализированного элемента электрической цепи.

В резистивном элементе (сопротивлении) (рис. 1.26) мгновенная мощность

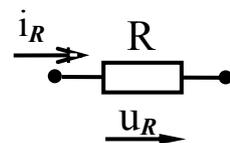


Рис. 1.26

$$p_R(t) = u_R i_R = R i_R^2 = \frac{u_R^2}{R}.$$

В элементе R направления тока и напряжения всегда совпадают, поэтому мощность, которая рассеивается в сопротивлении, всегда положительная, т.е. электромагнитная энергия всегда поступает от источника энергии к сопротивлению, где происходит необратимый процесс ее поглощения.

Энергия, которая выделяется в сопротивлении за время от 0 до t , определяется законом Джоуля-Ленца

$$W_R = \int_0^t p_R(t) dt = \int_0^t R i_R^2 dt.$$

Для постоянного тока

$$W_R = R I^2 t.$$

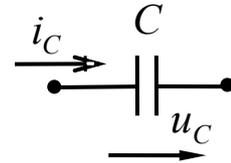


Рис. 1.27

В емкостном элементе (емкости) (рис.1.27) мгновенная мощность

$$p_C(t) = u_C i_C = u_C C \frac{du_C}{dt}.$$

Если напряжение на емкости возрастает (емкость заряжается, т.е. $\frac{du_C}{dt} > 0$), мощность в емкости $p_C > 0$ и емкость накапливает энергию электрического поля. Если напряжение на емкости уменьшается (емкость разряжается, $\frac{du_C}{dt} < 0$), мощность $p_C < 0$ и емкость отдает электрическую энергию.

В емкости (идеальном элементе) потери энергии отсутствуют.

Энергия электрического поля, которую запасает емкость при условии $u_C(0) = 0$,

$$W_C = \int_0^t p_C(t) dt = \int_0^t C u_C \frac{du_C}{dt} dt = \frac{C u_C^2(t)}{2}.$$

В индуктивном элементе (индуктивности) (рис. 1.28) мгновенная мощность

$$p_L(t) = u_L i_L = L \frac{di_L}{dt} i_L.$$

В случае увеличения тока $\left(\frac{di_L}{dt} > 0\right)$, мощность $p_L > 0$ и индуктивность накапливает энергию магнитного поля. При уменьшении тока $\left(\frac{di_L}{dt} < 0\right)$, $p_L < 0$ - индуктивность отдает энергию в электрическую цепь.

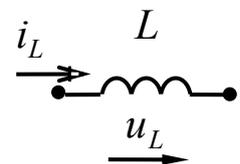


Рис. 1.28

В индуктивности (идеальном элементе) потери энергии при ее работе отсутствуют.

Энергия магнитного поля, которую запасает индуктивность при условии $i_L(0) = 0$,

$$W_L = \int_0^t p_L(t) dt = \int_0^t Li_L \frac{di_L}{dt} dt = \frac{Li_L^2(t)}{2}.$$

Мгновенная мощность источника ЭДС (рис. 1.29)

$$p_e(t) = \pm e(t)i(t)$$

Знак “+” берется в случае совпадения направлений тока и ЭДС, знак “-“ - если они имеют противоположные направления.

Для постоянного тока $p_E = \pm EI$.

Мгновенная мощность источника ТДС (рис. 1.30)

$$p_j(t) = \pm u_j(t)j(t).$$

Знак “+” берется в том случае, когда напряжение на внешних зажимах источника ТДС направлено противоположно направлению ТДС, знак “-“ - если они совпадают.

В источнике тока (рис. 1.31) напряжение можно определить как $Ri(t)$, потому мощность источника ТДС

$$p_j(t) = \pm Ri(t)j(t).$$

Для постоянного тока $p_J = \pm RIJ$.

- **Баланс мощностей.**

Мгновенная мощность любого элемента с положительным знаком характеризует скорость потребления энергии этим элементом, а мгновенная мощность с отрицательным знаком - скорость отдачи энергии этим элементом.

Условие баланса мгновенных мощностей можно сформулировать таким образом:

сумма мгновенных мощностей, которые отдаются в цепь всеми источниками энергии, равняется сумме мгновенных мощностей, которые потребляются всеми приемниками энергии

$$\sum p_{ист} = \sum p_{пр}.$$

Для постоянного тока баланс мощностей в электрической цепи имеет вид:

$$\sum P_{ист} = \sum P_{пр}$$

или

$$\sum_{\kappa} E_{\kappa} I_{\kappa} + \sum_n U_n J_n = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2 + \dots$$

Это уравнение используется для проверки правильности расчета токов в любой электрической цепи постоянного тока.

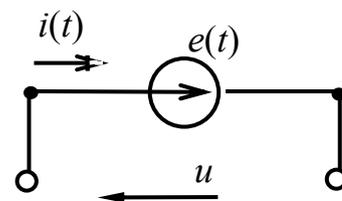


Рис.1.29

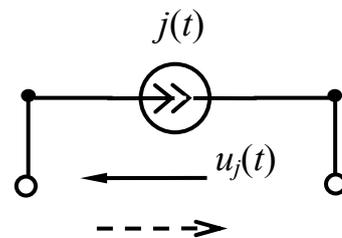


Рис. 1.30

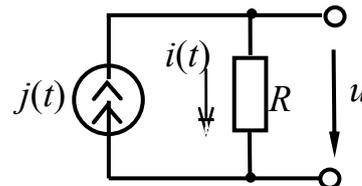


Рис. 1.31

РАЗДЕЛ 2

МЕТОДЫ РАСЧЕТА ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ ПОСТОЯННОГО ТОКА

Лекция 3

План лекции:

- 2.1. Метод эквивалентных преобразований.
- 2.2. Метод уравнений Кирхгофа.

2.1. Метод эквивалентных преобразований.

Этот метод за счет уменьшения количества ветвей, узлов и контуров позволяет упростить схему электрической цепи, а соответственно и расчет токов и напряжений.

Преобразование называется **эквивалентным**, если токи и напряжения во внешней по отношению к преобразованию части цепи не изменяются.

При расчете электрических цепей с одним источником энергии метод эквивалентных преобразований позволяет обойтись без решения системы уравнений. Но следует понимать, что чем больше мы упрощаем (сворачиваем) схему для ее расчета, тем больше придется потом ее разворачивать обратно.

- **Последовательное соединение элементов.**

Последовательное соединение сопротивлений (рис. 2.1) можно заменить одним эквивалентным резистивным элементом, сопротивление которого равно сумме сопротивлений последовательно соединенных элементов.

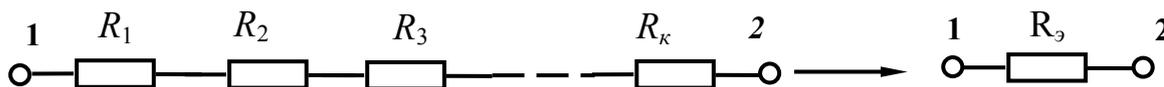


Рис. 2.1

$$R_{\text{э}} = R_1 + R_2 + \dots + R_k.$$

При последовательном соединении резистивных элементов их сопротивления складываются.

При последовательном соединении индуктивных элементов (рис. 2.2) складываются их индуктивности.



Рис. 2.2

$$L_{\text{э}} = L_1 + L_2 + \dots + L_k.$$

При последовательном соединении емкостных элементов (рис. 2.3) величина, обратная эквивалентной емкости, равняется сумме обратных емкостей последовательно соединенных элементов.

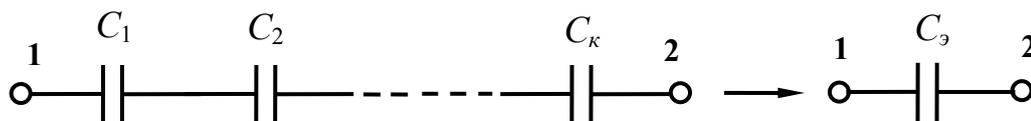


Рис. 2.3

$$\frac{1}{C_3} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_k}$$

Последовательное соединение источников ЭДС (рис. 2.4) можно заменить одним эквивалентным источником, ЭДС которого равна алгебраической сумме последовательно соединенных ЭДС.

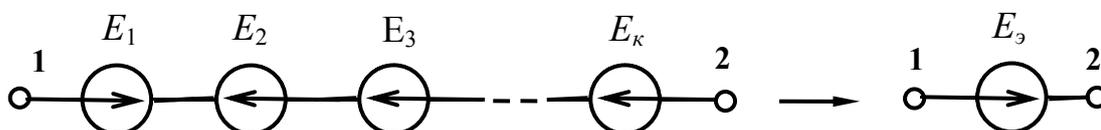


Рис. 2.4

$$E_3 = E_1 - E_2 - E_3 + \dots - E_k.$$

Рассмотрим, можно ли последовательно соединять источники ТДС (рис.2.5).

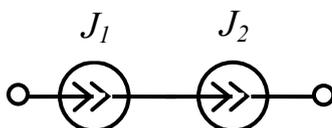


Рис. 2.5

Предположим, что $J_1 = 1\text{ А}$, а $J_2 = 3\text{ А}$. Согласно определению первого источника ТДС ток в ветви должен равен 1 А, а второго – 3 А. Но в одной ветви протекает лишь один ток, поэтому последовательное соединение источников ТДС с разным значением тока в рамках упрощенной модели, которую мы построили, не имеет смысла и не рассматривается. Исключение составляет последовательное соединение источников ТДС одинакового направления с одинаковым значением J .

- **Параллельное соединение элементов.**

Параллельно соединенными называются элементы, которые подключены к одной паре узлов.

При параллельном соединении резистивных элементов (рис. 2.6) величина, обратная эквивалентному сопротивлению, равна сумме обратных сопротивлений параллельно соединенных элементов.

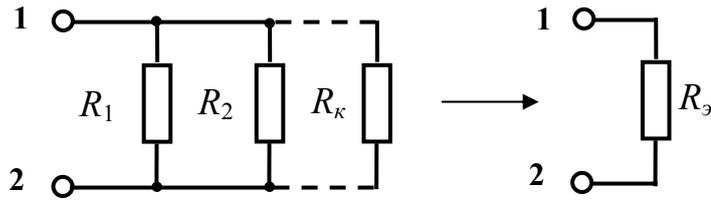


Рис. 2.6

$$\frac{1}{R_9} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_k} \quad \text{или} \quad G_9 = G_1 + G_2 + \dots + G_k \quad .$$

При параллельном соединении сопротивлений складываются их проводимости.

Частный случай: параллельное соединение двух сопротивлений (рис. 2.7).

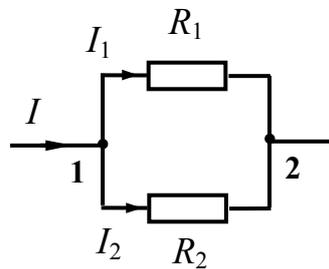


Рис. 2.7

$$\frac{1}{R_9} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}; \quad R_9 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

При расчетах очень часто встречается такая задача.

Известный ток I подходит к двум параллельно соединенным сопротивлениям R_1 и R_2 . необходимо определить токи I_1 и I_2 в сопротивлениях R_1 и R_2 . Решим эту задачу.

Напряжение между узлами

$$U_{12} = IR_9 = I \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

Ток в первом сопротивлении

$$I_1 = \frac{U_{12}}{R_1} = I \frac{R_1 R_2}{R_1 (R_1 + R_2)} = I \frac{R_2}{R_1 + R_2}.$$

Таким образом, ток в одном из сопротивлений равен току I , умноженному на сопротивление противоположной ветви и разделенному на сумму сопротивлений ветвей. Это утверждение называют правилом разброса или правилом “чужого сопротивления”. Согласно правилу ток в сопротивлении R_2

$$I_2 = I \frac{R_1}{R_1 + R_2}.$$

При параллельном соединении индуктивных элементов (рис. 2.8) величина, обратная эквивалентной индуктивности, равна сумме обратных индуктив-

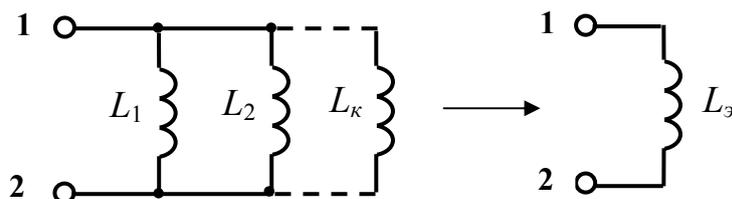


Рис. 2.8

ностей параллельно соединенных элементов.

$$\frac{1}{L_3} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots + \frac{1}{L_k}.$$

При параллельном соединении емкостных элементов (рис. 2.9) их емкости складываются.

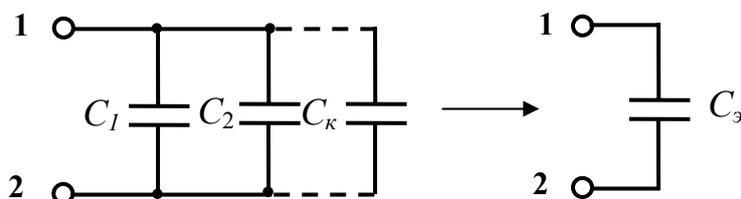


Рис. 2.9

$$C_3 = C_1 + C_2 + \dots + C_k.$$

Рассмотрим, можно ли соединять параллельно источники ЭДС (рис. 2.10).

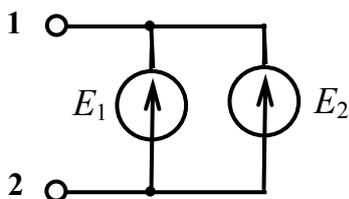


Рис. 2.10

Предположим, что $E_1=1$ В, а $E_2=5$ В. Согласно определению первого источника ЭДС напряжение U_{12} должна быть равно 1 В, а второго - 5 В. Но между двумя узлами действует лишь одно напряжение, поэтому параллельное соединение источников ЭДС с разными значениями ЭДС в рамках построенной модели не имеет смысла и не рассматривается.

Исключение составляет параллельное соединение источников ЭДС одного направления с одинаковым значением ЭДС.

Параллельное соединение источников ТДС (рис. 2.11) можно заменить одним эквивалентным источником, ТДС которого равна алгебраической сумме параллельно соединенных источников ТДС. Направление эквивалентного ис-

точника ТДС берется произвольным. Источники, направление которых совпадает с J_9 , берутся со знаком «+», если не совпадает – со знаком «-».

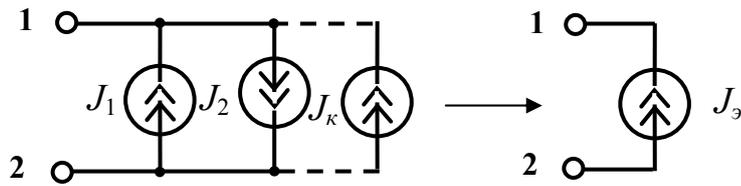


Рис. 2.11

$$J_9 = J_1 - J_2 + \dots + J_k.$$

• **Преобразование треугольника сопротивлений в эквивалентную звезду и наоборот.**

На рис. 2.12 изображено соединение сопротивлений звездой, а на рис. 2.13 – треугольником.

До этого все утверждения об эквивалентных преобразованиях давались в конечном виде без доказательства. На примере преобразования треугольника сопротивлений в звезду покажем, как проводится доказательство таких утверждений.

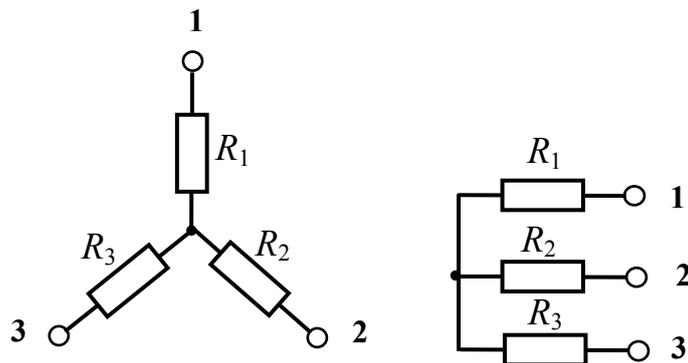


Рис. 2.12. Соединение резистивных элементов звездой (Y)

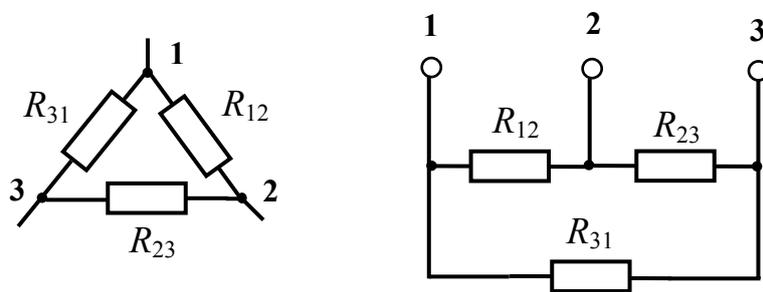


Рис. 2.13. Соединение резистивных элементов треугольником (Δ)

На рис. 2.14 изображена схема соединения трех сопротивлений R_{12} , R_{23} , R_{31} – треугольником, а пунктиром – сопротивлений R_1 , R_2 , R_3 - звездой. Преоб-

разование будет эквивалентным тогда, когда при неизменных напряжениях U_{12} , U_{23} , U_{31} входные токи I_1 , I_2 , I_3 также останутся неизменными.

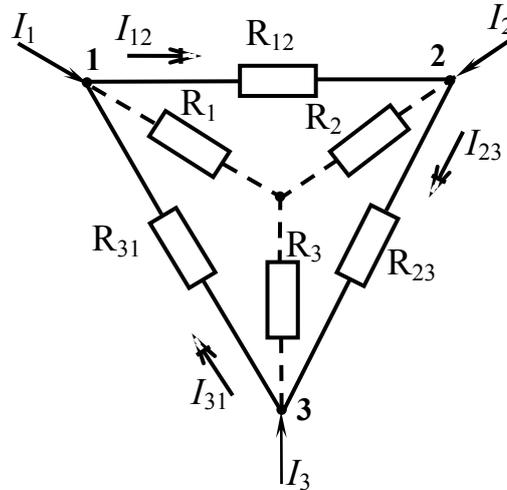


Рис. 2.14

Запишем второй закон Кирхгофа для контура 1-2-3:

$$R_{12}I_{12} + R_{23}I_{23} + R_{31}I_{31} = 0. \quad (2.1)$$

Согласно первому закону Кирхгофа для узлов 1 и 2 имеем:

$$I_1 + I_{31} - I_{12} = 0 \quad \text{или} \quad I_{31} = I_{12} - I_1, \quad (2.2)$$

$$I_2 + I_{12} - I_{23} = 0 \quad \text{или} \quad I_{23} = I_{12} + I_2. \quad (2.3)$$

Подставляя токи I_{31} и I_{23} из (2.2) и (2.3) в уравнение (2.1), получим

$$I_{12} = \frac{R_{31}I_1 - R_{23}I_2}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}.$$

Напряжение

$$U_{12} = I_{12}R_{12} = \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}I_1 - \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}I_2. \quad (2.4)$$

Найдем это же напряжение U_{12} для соединения звездой из второго закона Кирхгофа:

$$U_{12} + R_2I_2 - R_1I_1 = 0 \quad \text{или} \quad U_{12} = R_1I_1 - R_2I_2. \quad (2.5)$$

Сравнивая выражения (2.4) и (2.5) для напряжения U_{12} треугольника и звезды сопротивлений, имеем

$$R_1 = \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}, \quad R_2 = \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}},$$

аналогично

$$R_3 = \frac{R_{23}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}. \quad (2.6)$$

Если решить уравнения (2.6) относительно сопротивлений треугольника, получим формулы для преобразования соединения сопротивлений звездой соединением в треугольник:

$$\begin{aligned} R_{12} &= R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_3}; \\ R_{23} &= R_2 + R_3 + \frac{R_2 R_3}{R_1}; \\ R_{31} &= R_1 + R_3 + \frac{R_1 R_3}{R_2}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Уравнения (2.7) записанные через проводимости ветвей имеют вид:

$$\begin{aligned} G_{12} &= \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2 + G_3}; \\ G_{23} &= \frac{G_2 G_3}{G_1 + G_2 + G_3}; \\ G_{31} &= \frac{G_3 G_1}{G_1 + G_2 + G_3}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

• **Перенос источников ЭДС и ТДС.**

При расчетах электрических цепей встречаются случаи, когда участок электрической цепи содержит ветвь, которая состоит только из источника ЭДС (рис. 2.15,а).

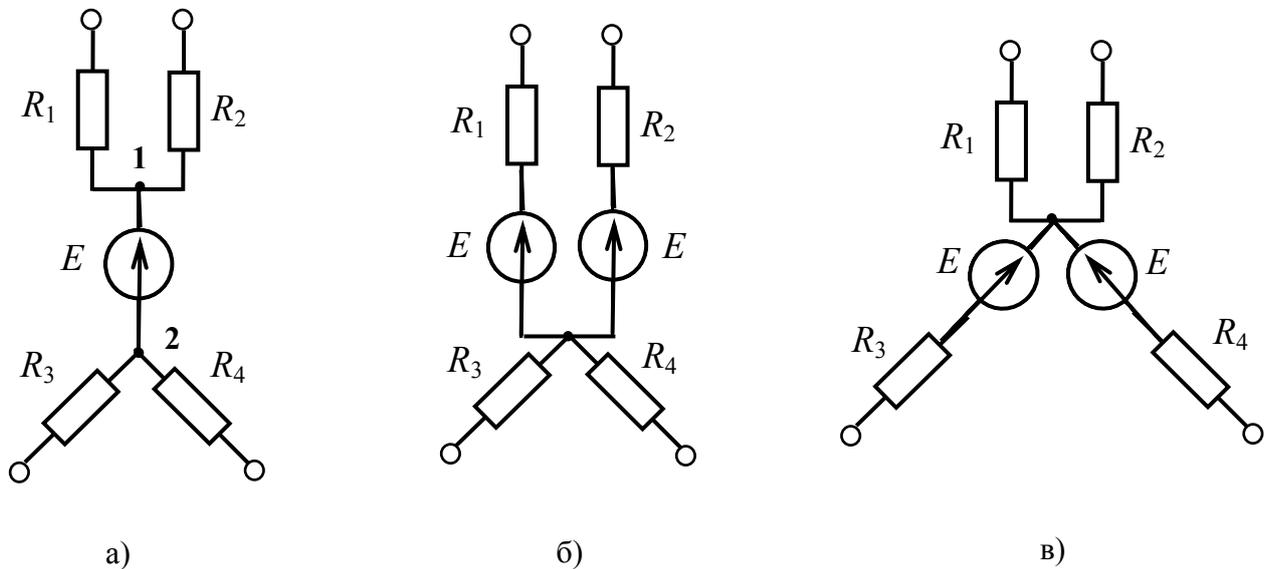


Рис. 2.15. Перенос источника ЭДС

Легко показать, что перенос источника ЭДС E за узел (рис. 2.15, б или в) не изменяет системы уравнений, составленной по законам Кирхгофа для данного участка электрической цепи. Поэтому токи во внешних выводах и напряжения между ними для всех трех схем будут одинаковые, что отвечает условию эквивалентности преобразований в электрических цепях. При таких преобразо-

ваниях количество узлов уменьшается на единицу, а полученные источники напряжения, например E, R_1 и E, R_2 , можно заменить эквивалентными источниками тока.

В другом случае, если источник ТДС J подключен к узлам 1 и 3 (рис. 2.16, а), то его можно заменить двумя источниками ТДС J , подключенными параллельно ветвям с сопротивлениями R_1 и R_2 (рис. 2.16, б).

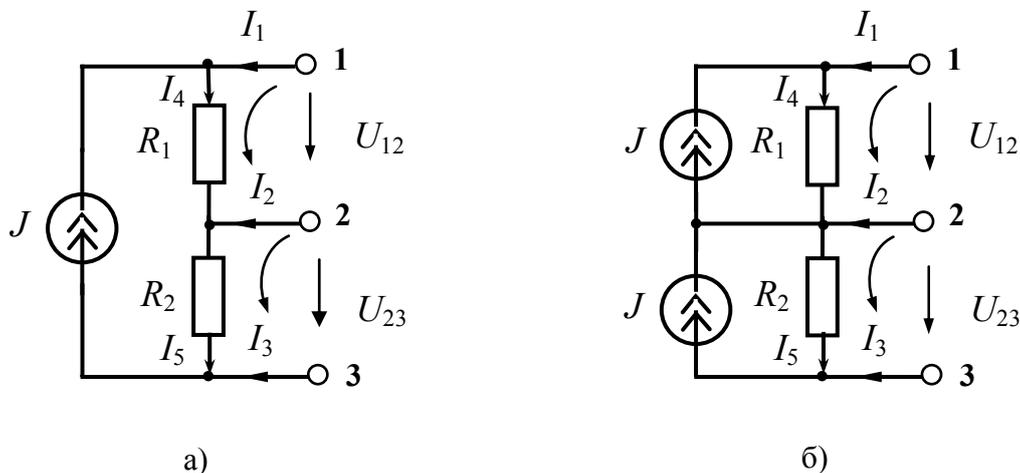


Рис. 2.16. Перенос источника ТДС

Как и в предыдущем случае, эквивалентность данного преобразования основывается на том, что обе схемы описываются одной системой уравнений, составленной по законам Кирхгофа:

$$\begin{aligned} I_1 + J - I_4 &= 0; \\ I_2 + I_4 - I_5 &= 0; \\ I_3 - J + I_5 &= 0; \\ R_1 I_4 - U_{12} &= 0; \\ R_2 I_5 - U_{23} &= 0. \end{aligned}$$

При таком преобразовании полученные источники тока J, R_1 и J, R_2 можно заменить эквивалентными источниками напряжения.

2.2. Метод уравнений Кирхгофа.

Расчет электрических цепей путем решения системы уравнений, составленных по законам Кирхгофа, представляет собой наиболее общий метод анализа электрических цепей.

Постановка задачи.

Электрическая цепь содержит u узлов и v ветвей с неизвестными токами. Заданы параметры всех активных и пассивных элементов цепи. Необходимо определить токи во всех ветвях.

Методику расчета методом уравнений Кирхгофа и его алгоритм разберем на примере конкретной схемы (рис. 2.17), которая имеет три узла ($u = 3$) и четыре ветви ($v = 4$) с неизвестными токами. Токи в ветвях, в которых находятся

источники ТДС J_1 и J_4 , согласно определению источников ТДС известны и равны соответственно J_1 и J_4 .

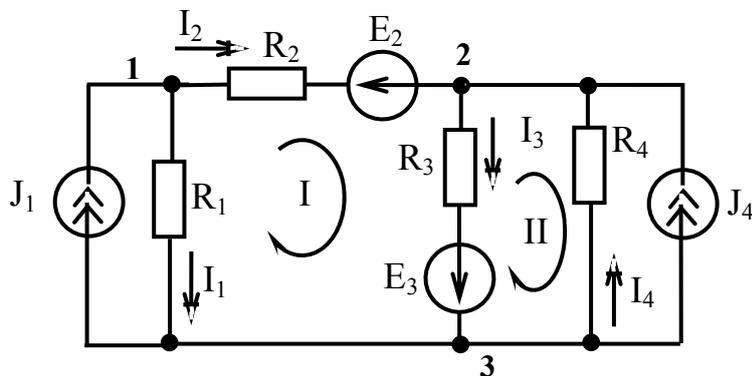


Рис. 2.17. Метод уравнений Кирхгофа

Укажем положительные направления токов в ветвях с неизвестными токами. Для определения четырех токов $I_1 - I_4$ надо составить четыре уравнения по законам Кирхгофа. Если число узлов – y , то по первому закону Кирхгофа можно составить лишь $(y - 1)$ независимое уравнение, т.е. $3 - 1 = 2$. Уравнение, составленное для последнего узла, можно получить путем сложения уравнений, составленных для предыдущих узлов.

Составим уравнения по I закону Кирхгофа для первого и второго узла:

$$J_1 - I_1 - I_2 = 0;$$

$$I_2 - I_3 + I_4 + J_4 = 0.$$

Недостающие $v - (y - 1)$ уравнения, в данном случае $4 - (3 - 1) = 2$, составляются по второму закону Кирхгофа. Следует отметить, что только такое число независимых уравнений можно составить по второму закону Кирхгофа. Для записи второго закона Кирхгофа надо выбрать независимые контура, для которых уравнения, записанные по второму закону Кирхгофа, будут независимыми.

Правила выбора независимых контуров:

1. Каждый последующий контур должен отличаться от предыдущего по крайней мере одной новой ветвью.
2. Ветви с источниками ТДС не должны входить в выбранные контура.
3. Желательно выбирать простые (внутренние) контура.

Согласно этим правилам в нашем случае выбираем два контура, произвольно указываем направления их обхода и записываем для них второй закон Кирхгофа:

$$E_3 - E_2 = R_3 I_3 - R_1 I_1 + R_2 I_2;$$

$$-E_3 = -R_3 I_3 - R_4 I_4.$$

Решая систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными, получаем токи $I_1 - I_4$.

- **Алгоритм расчета электрических цепей методом уравнений Кирхгофа.**

1. Определяем число узлов y , число ветвей с неизвестными токами v и указываем положительные направления токов в этих ветвях.
2. Для $(y - 1)$ узла составляем уравнения по первому закону Кирхгофа.
3. Выбираем $v - (y - 1)$ независимый контур и составляем для каждого из них уравнения по второму закону Кирхгофа. Направления обхода контуров - произвольные.
4. Решая систему уравнений, определяем токи в ветвях.
5. Составляем уравнение баланса мощностей в цепи и проверяем правильность расчетов.

Метод уравнений Кирхгофа можно использовать для расчета как линейных, так и нелинейных электрических цепей. Для линейных цепей коэффициенты системы уравнений являются постоянными величинами, для нелинейных - функциями токов или напряжений.

Лекция 4

План лекции:

- 2.3. Метод контурных токов.
- 2.4. Метод узловых напряжений.

2.3. Метод контурных токов.

Этот метод позволяет сократить порядок системы до числа уравнений, составленных только по второму закону Кирхгофа.

Постановка задачи: дана схема электрической цепи и заданы параметры элементов, причем источники энергии заданы в виде источников напряжения. Если схема имеет источники тока, то их нужно заменить эквивалентными источниками напряжения. Необходимо определить токи во всех ветвях.

Методику расчета и его алгоритм рассмотрим на примере конкретной схемы (рис. 2.18).

Выбираем независимые контура так, как это делается в методе уравнений Кирхгофа, и указываем направления их обхода.

Введем в рассмотрение расчетные (в действительности таких токов нет) так называемые контурные токи. Будем считать, что в каждом контуре протекает свой контурный ток, направление которого совпадает с направлением обхода контура.

По числу выбранных контуров записываем в общем виде контурные уравнения, вид которых надо просто запомнить:

$$R_{11}I_{1K} + R_{12}I_{2K} + R_{13}I_{3K} = E_{1K};$$

$$R_{21}I_{1K} + R_{22}I_{2K} + R_{23}I_{3K} = E_{2K};$$

$$R_{31}I_{1K} + R_{32}I_{2K} + R_{33}I_{3K} = E_{3K}.$$

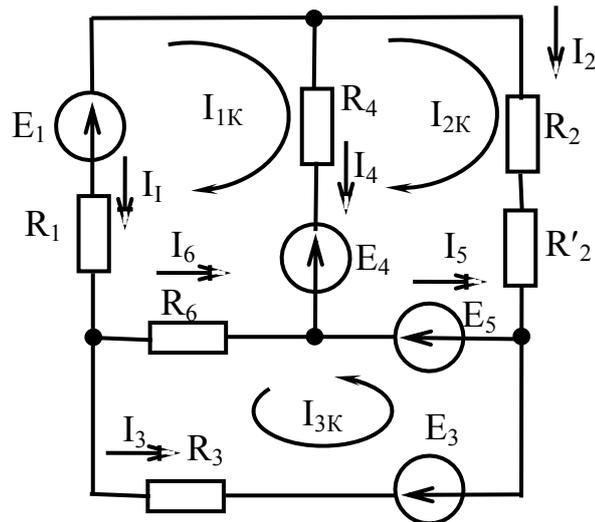


Рис. 2.18. Метод контурных токов

В этих уравнениях I_{1K}, I_{2K}, I_{3K} – контурные токи.

R_{11} – собственное сопротивление первого контура; равно сумме сопротивлений, которые входят в первый контур. Для данной схемы

$$R_{11} = R_1 + R_4 + R_6.$$

R_{22} – собственное сопротивление второго контура

$$R_{22} = R_2 + R'_2 + R_4.$$

R_{33} – собственное сопротивление третьего контура

$$R_{33} = R_3 + R_6.$$

$R_{12} = R_{21}$ – общие сопротивления между первым и вторым контуром.

Они равны сумме сопротивлений общей ветви первого и второго контура, которая берется с положительным знаком, если направления контурных токов в этой ветви совпадают, и с отрицательным, если они противоположны.

Для данной схемы

$$R_{12} = R_{21} = -R_4.$$

Аналогично

$$R_{13} = R_{31} = +R_6,$$

$$R_{23} = R_{32} = 0.$$

Если контура не имеют общей ветви, то общее сопротивление между ними равно нулю.

E_{1K} – контурная ЭДС первого контура. Она равна алгебраической сумме ЭДС, которые входят в первый контур. Электродвижущая сила берется с положительным знаком, если ее направление совпадает с направлением контурного тока, и с отрицательным, если они противоположны.

Для данной схемы

$$E_{1K} = E_1 - E_4.$$

Аналогично

$$\begin{aligned}E_{2K} &= E_4 + E_5, \\E_{3K} &= -E_3 + E_5.\end{aligned}$$

Таким образом, определены все коэффициенты, которые входят в систему контурных уравнений.

Решая систему относительно контурных токов, определяем I_{1K}, I_{2K}, I_{3K} .

Указываем положительные направления токов в ветвях и определяем их через контурные токи, учитывая совпадение направлений токов в ветвях и контурных токов в них.

В ветви с током I_1 течет лишь первый контурный ток I_{1K} , направление которого не совпадает с током I_1 , поэтому $I_1 = -I_{1K}$.

Аналогично

$$I_2 = I_{2K}, \quad I_3 = I_{3K}.$$

В ветви с током I_4 протекают два контурных тока I_{1K} и I_{2K} . Направление первого совпадает с направлением тока I_4 , а второго - не совпадает. Поэтому ток I_4 определяется как разность контурных токов

$$I_4 = I_{1K} - I_{2K}.$$

Аналогично

$$\begin{aligned}I_5 &= -I_{2K} - I_{3K}, \\I_6 &= -I_{1K} - I_{3K}.\end{aligned}$$

Таким образом, найдены токи во всех ветвях данной схемы. Контурные уравнения можно записать в матричной форме

$$\begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{1K} \\ I_{2K} \\ I_{3K} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{1K} \\ E_{2K} \\ E_{3K} \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix}$ - матрица сопротивлений цепи,

$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_{1K} \\ I_{2K} \\ I_{3K} \end{pmatrix}$ - матрица контурных токов,

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} E_{1K} \\ E_{2K} \\ E_{3K} \end{pmatrix} - \text{матрица контурных ЭДС.}$$

Тогда в сокращенном виде контурные уравнения в матричной форме будут иметь вид

$$\mathbf{RI} = \mathbf{E}.$$

Решение данного матричного уравнения имеет вид

$$\mathbf{I} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{E},$$

где \mathbf{R}^{-1} - матрица, обратная матрице сопротивлений цепи.

Матричная запись облегчает аналитические исследования электрических цепей за счет сокращения записей. Но она не приводит к сокращению расчетов.

- **Алгоритм расчета электрических цепей методом контурных токов.**

1. Выбираем необходимое количество $v - (y - 1)$ независимых контуров и указываем произвольно направления контурных токов.
2. По количеству контурных токов записываем в общем виде контурные уравнения.
3. По схеме цепи определяем собственные и общие сопротивления контуров и контурные ЭДС.
4. Решая систему контурных уравнений, определяем контурные токи.
5. Произвольно указываем положительные направления токов в ветвях и определяем их через контурные токи.
6. Составляем уравнение баланса мощностей цепи и проверяем верность расчетов.

Если начальная схема содержала источники тока, то надо возвратиться к ней и определить недостающие токи.

Пример. Определить токи в ветвях электрической цепи, схема которой изображена на рис. 2.19. В этой схеме задано:

$$R_1 = 1\text{Ом}, R_2 = 2\text{Ом}, R_3 = 5\text{Ом}, E_1 = 2\text{В}, E_2 = 4\text{В}, E_3 = 6\text{В}.$$

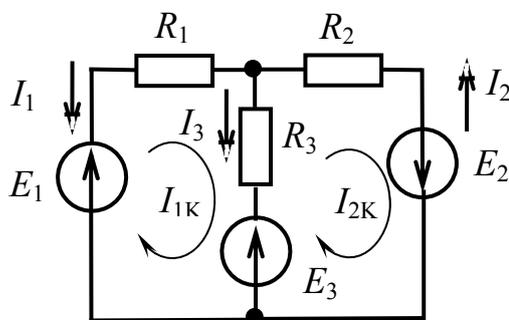


Рис. 2.19

Решение:

1. Выбираем два внутренних контура и указываем направления контурных токов.

2. Записываем контурные уравнения в общем виде:

$$R_{11}I_{1K} + R_{12}I_{2K} = E_{1K};$$

$$R_{21}I_{1K} + R_{22}I_{2K} = E_{2K}.$$

3. Определяем коэффициенты системы:

$$R_{11} = R_1 + R_3 = 6 \text{ Ом};$$

$$R_{22} = R_2 + R_3 = 7 \text{ Ом};$$

$$R_{12} = R_{21} = -R_3 = -5 \text{ Ом};$$

$$E_{1K} = E_1 - E_3 = 2 - 6 = -4 \text{ В};$$

$$E_{2K} = E_3 + E_2 = 6 + 4 = 10 \text{ В}.$$

4. Решаем систему уравнений

$$\begin{cases} 6I_{1K} - 5I_{2K} = -4; \\ -5I_{1K} + 7I_{2K} = 10 \end{cases}$$

и определяем контурные токи:

$$I_{1K} = \frac{22}{17} = 1,294 \text{ А}; \quad I_{2K} = \frac{40}{17} = 2,353 \text{ А}.$$

5. Указываем положительные направления токов в ветвях и определяем их по контурным токам:

$$I_1 = -I_{1K} = -1,294 \text{ А};$$

$$I_2 = -I_{2K} = -2,353 \text{ А};$$

$$I_3 = I_{1K} - I_{2K} = -1,059 \text{ А}.$$

6. Составляем уравнение баланса мощностей цепи:

$$-E_1I_1 - E_2I_2 - E_3I_3 = R_1I_1^2 + R_2I_2^2 + R_3I_3^2 ;$$

$$P_E = 18,35 \text{ Вт}; \quad P_R = 18,35 \text{ Вт}.$$

Уравнение баланса мощностей выполняется, что свидетельствует о верности расчетов.

Если электрическая цепь имеет ветви с источниками ТДС (без параллельных ветвей с сопротивлениями), которые нельзя заменить эквивалентными источниками напряжения, то такую цепь также можно рассчитать методом контурных токов. Для этого контура выбираются таким образом, чтобы ветвь с источником ТДС входила лишь в один контур. Тогда контурный ток в этом контуре считается известным и равным значению источника ТДС J . В таком случае количество неизвестных контурных токов сокращается на число ветвей с источниками ТДС.

Пример. Определить токи в ветвях электрической цепи, схема которой изображена на рис. 2.20. В этой схеме задано:

$R_1 = 3 \text{ Ом}, R_2 = 1 \text{ Ом}, R_3 = 4 \text{ Ом}, R_4 = 5 \text{ Ом}, R_5 = 4 \text{ Ом},$
 $E_1 = 4 \text{ В}, E_4 = 2 \text{ В}, E_6 = 8 \text{ В}, J_5 = 1 \text{ А}.$

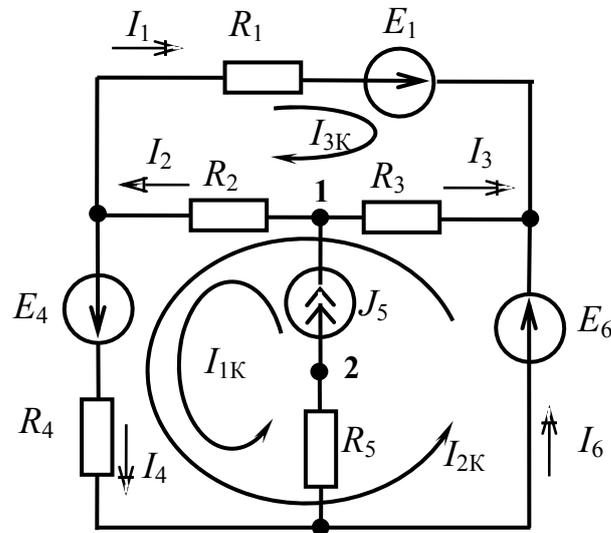


Рис. 2.20

Решение.

1. Выбираем контура и указываем направления контурных токов (см. рис. 2.20).
2. Записываем контурные уравнения:

$$R_{11}I_{1K} + R_{12}I_{2K} + R_{13}I_{3K} = E_{1K};$$

$$R_{21}I_{1K} + R_{22}I_{2K} + R_{23}I_{3K} = E_{2K};$$

$$R_{31}I_{1K} + R_{32}I_{2K} + R_{33}I_{3K} = E_{3K}.$$

Считаем, что первый контурный ток $I_{1K} = J_5 = 1 \text{ А}$. Остаются лишь два неизвестных контурных тока, для определения которых достаточно двух уравнений.

В первом уравнении собственное сопротивление R_{11} будет неопределенно, так как сопротивление пятой ветви бесконечно большое (внутреннее сопротивление источника ТДС $R_J = \infty$). Исключаем первое уравнение и переписываем систему в виде:

$$R_{22}I_{2K} + R_{23}I_{3K} = E_{2K} - R_{21}J_5;$$

$$R_{32}I_{2K} + R_{33}I_{3K} = E_{3K} - R_{31}J_5.$$

3. Определяем коэффициенты системы

$$R_{22} = R_2 + R_3 + R_4 = 10 \text{ Ом};$$

$$R_{33} = R_1 + R_2 + R_3 = 8 \text{ Ом};$$

$$R_{23} = R_{32} = R_2 + R_3 = 5 \text{ Ом};$$

$$R_{21} = R_2 + R_4 = 6 \text{ Ом};$$

$$R_{31} = R_2 = 1 \text{ Ом};$$

$$E_{2K} = E_4 + E_6 = 10 \text{ В};$$

$$E_{3K} = E_1 = 4 \text{ В}.$$

Система принимает вид:

$$10 I_{2K} + 5 I_{3K} = 4;$$

$$5 I_{2K} + 8 I_{3K} = 3.$$

4. Решая систему, определяем контурные токи:

$$I_{2K} = \frac{34}{110} \text{ А};$$

$$I_{3K} = \frac{2}{11} \text{ А}.$$

5. Указываем положительные направления токов в ветвях и определяем их по контурным токам:

$$I_1 = I_{3K} = \frac{2}{11} \text{ А};$$

$$I_2 = I_{1K} + I_{2K} + I_{3K} = 1 + \frac{34}{110} + \frac{2}{11} = \frac{164}{110} \text{ А};$$

$$I_3 = -I_{3K} - I_{2K} = -\frac{34}{110} - \frac{2}{11} = -\frac{54}{110} \text{ А};$$

$$I_4 = I_{1K} + I_{2K} = 1 + \frac{34}{110} = \frac{144}{110} \text{ А};$$

$$I_6 = I_{2K} = \frac{34}{110} \text{ А}.$$

6. Для проверки решения записываем уравнение баланса мощностей в цепи

$$E_1 I_1 + E_4 I_4 + E_6 I_6 + U_{12} J_5 = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2 + R_4 I_4^2 + R_5 J_5^2.$$

Напряжение U_{12} определяем из второго закона Кирхгофа для первого контура

$$E_4 = R_2 I_2 + R_4 I_4 + R_5 J_5 - U_{12},$$

откуда

$$U_{12} = \frac{1104}{110} \text{ В}.$$

Подставляя в уравнение баланса мощностей численные значения, получим:

$$P_{\text{ист}} = 4 \cdot \frac{2}{11} + 2 \cdot \frac{144}{110} + 8 \cdot \frac{34}{110} + \frac{1104}{110} \cdot 1 = \frac{1744}{110} \text{ Вт};$$

$$P_{\text{пр.}} = 3 \cdot \left(\frac{2}{11}\right)^2 + 1 \cdot \left(\frac{164}{110}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{54}{110}\right)^2 + 5 \cdot \left(\frac{144}{110}\right)^2 + 4 \cdot 1 = \frac{1744}{110} \text{ Вт}.$$

Таким образом, баланс мощностей в цепи выполняется.

Обоснование метода контурных токов дадим на примере цепи, схема которой представлена на рис. 2.21. Выбираем $\nu - (y - 1)$ контур, произвольно указываем направления контурных токов (направления обхода контуров) и запи-

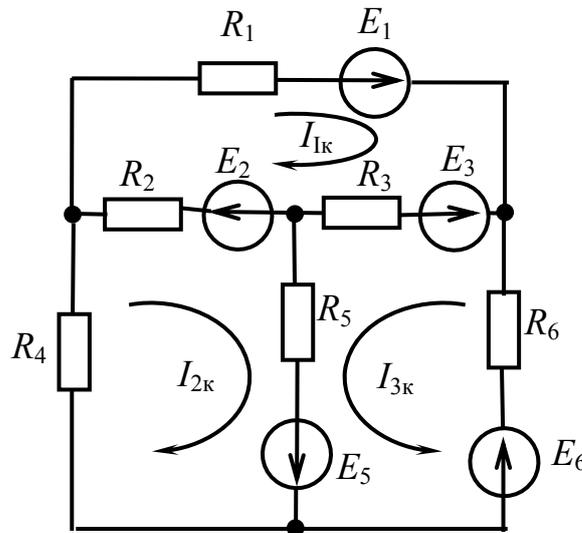


Рис. 2.21

сываем для выбранных контуров второй закон Кирхгофа, выражая токи в ветвях через контурные токи:

$$R_1 I_{1K} + R_3 (I_{1K} + I_{3K}) + R_2 (I_{1K} - I_{2K}) = E_1 - E_3 + E_2;$$

$$R_4 I_{2K} + R_2 (I_{2K} - I_{1K}) + R_5 (I_{2K} + I_{3K}) = E_5 - E_2;$$

$$R_6 I_{3K} + R_3 (I_{3K} + I_{1K}) + R_5 (I_{3K} + I_{2K}) = E_5 + E_6 - E_3.$$

Объединяя слагаемые с одинаковыми контурными токами, получаем

$$(R_1 + R_2 + R_3) I_{1K} - R_2 I_{2K} + R_3 I_{3K} = E_1 - E_3 + E_2;$$

$$-R_2 I_{1K} + (R_4 + R_2 + R_5) I_{2K} + R_5 I_{3K} = E_5 - E_2;$$

$$R_3 I_{1K} + R_5 I_{2K} + (R_3 + R_5 + R_6) I_{3K} = E_5 + E_6 - E_3.$$

Введем обозначения:

$$R_{11} = R_1 + R_2 + R_3,$$

$$R_{12} = R_{21} = -R_2,$$

$$E_{1K} = E_1 + E_2 - E_3,$$

$$R_{22} = R_2 + R_4 + R_5,$$

$$R_{13} = R_{31} = R_3,$$

$$E_{2K} = E_5 - E_2,$$

$$R_{33} = R_3 + R_5 + R_6,$$

$$R_{23} = R_{32} = R_5,$$

$$E_{3K} = E_5 + E_6 - E_3.$$

Таким образом, система уравнений приобретает стандартный вид уравнений метода контурных токов, решение которой рассмотрено выше.

$$\begin{aligned}
 R_{11}I_{1K} + R_{12}I_{2K} + R_{13}I_{3K} &= E_{1K}; \\
 R_{21}I_{1K} + R_{22}I_{2K} + R_{23}I_{3K} &= E_{2K}; \\
 R_{31}I_{1K} + R_{32}I_{2K} + R_{33}I_{3K} &= E_{3K}.
 \end{aligned}$$

2.4. Метод узловых напряжений.

Этот метод позволяет сократить порядок системы до числа уравнений, составленных лишь по первому закону Кирхгофа.

Постановка задачи: дана схема электрической цепи и заданы параметры всех элементов, причем источники энергии заданы в виде источников тока. Если схема имеет источники напряжения, то их нужно заменить эквивалентными источниками тока. Требуется определить токи во всех ветвях.

Методику расчета и ее алгоритм рассмотрим на примере конкретной схемы (рис. 2.22).

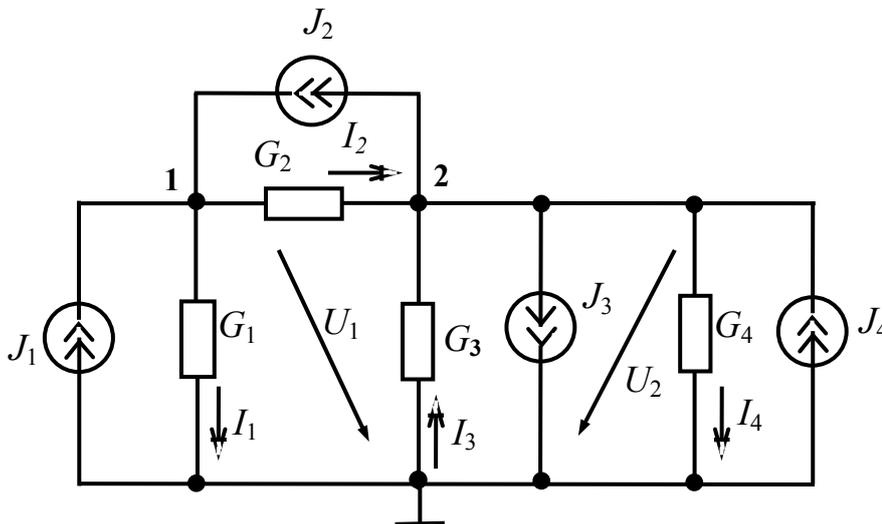


Рис. 2.22. Метод узловых напряжений

Выбираем базисный узел (обозначается знаком « \perp ») и нумеруем остальные узлы. За базисный удобно принять узел, где сходится больше всего ветвей. Напряжение между первым узлом и базисным обозначим U_1 и назовем узловым напряжением первого узла. Аналогично напряжение между вторым узлом и базисным обозначим U_2 – узловое напряжение второго узла. Узловые напряжения считаются направленными от соответствующего узла к базисному (положительные направления).

По числу пронумерованных узлов (в данном случае 2) записываем в общем виде узловые уравнения, вид которых надо запомнить.

$$\begin{aligned}
 G_{11}U_1 + G_{12}U_2 &= J_{1y}; \\
 G_{21}U_1 + G_{22}U_2 &= J_{2y}.
 \end{aligned}$$

В этих уравнениях U_1 и U_2 – узловые напряжения, G_{11} – собственная проводимость первого узла. Она равна сумме проводимостей ветвей, которые подходят к первому узлу:

$$G_{11} = G_1 + G_2.$$

G_{22} – собственная проводимость второго узла. Она равна сумме проводимостей ветвей, которые подходят ко второму узлу:

$$G_{22} = G_2 + G_3 + G_4.$$

G_{12} , G_{21} – общие проводимости между первым и вторым узлом. Они равны сумме проводимостей ветвей, которые включены между первым и вторым узлом. Общие проводимости всегда берутся с отрицательным знаком.

$$G_{12} = G_{21} = -G_2.$$

Если в электрической цепи нет ветвей, которые соединяют соответствующие узлы, то общая проводимость этих узлов равная нулю.

J_{1y} – узловая ТДС первого узла. Она равна алгебраической сумме ТДС, которые подходят к первому узлу. ТДС берется с положительным знаком, если она направлена к соответствующему узлу, и с отрицательным - если от узла.

Для данной цепи

$$J_{1y} = J_1 + J_2, \quad J_{2y} = -J_2 - J_3 + J_4.$$

Таким образом, определены все коэффициенты, которые входят в систему узловых уравнений.

Решая систему относительно узловых напряжений, определяем U_1 и U_2 . Указываем положительные направления токов в ветвях и определяем их по закону Ома через узловые напряжения. Если положительные направления узлового напряжения и тока в сопротивлении совпадают, ток берется со знаком “+”, если не совпадают - со знаком “-”.

$$I_1 = G_1 U_1, \quad I_3 = -G_3 U_2, \quad I_4 = G_4 U_2.$$

Для определения тока I_2 сначала найдем напряжение U_{12} на проводимости G_2 . Положительное направление напряжения U_{12} - от первого узла ко второму.

$$U_{12} = U_1 - U_2.$$

Тогда ток

$$I_2 = G_2 U_{12} = G_2 (U_1 - U_2).$$

Таким образом, найдены токи во всех ветвях данной схемы.

Узловые уравнения можно записать в матричной форме.

$$\begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{1y} \\ J_{2y} \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix}$ - матрица проводимостей цепи;

$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}$ - матрица узловых напряжений;

$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} J_{1y} \\ J_{2y} \end{pmatrix}$ - матрица узловых ТДС.

Тогда в матричной форме узловые уравнения будут иметь вид:

$$GU = J.$$

Решение данного матричного уравнения имеет вид

$$U = G^{-1}J,$$

где G^{-1} – матрица, обратная матрице проводимостей цепи.

- **Алгоритм расчета электрических цепей методом узловых напряжений.**

1. Выбираем базисный узел и нумеруем остальные узлы.
2. По количеству пронумерованных узлов записываем в общем виде узловые уравнения.
3. По схеме цепи определяем собственные и общие проводимости, а также узловые ТДС.
4. Решая систему уравнений, определяем узловые напряжения.
5. Указываем положительные направления токов в ветвях и определяем их по закону Ома через узловые напряжения.
6. Составляем уравнение баланса мощностей цепи и проверяем верность расчетов.

Если исходная схема содержала источники напряжения, то необходимо вернуться к ней и определить недостающие токи.

Примечание.

Метод узловых напряжений имеет преимущества (меньше порядок системы уравнений) над методом контурных токов в случае, когда выполняется соотношение

$$y - 1 < v - (y - 1).$$

В противоположном случае преимущества имеет метод контурных токов.

Пример. Определить токи в ветвях электрической цепи, схема которой изображена на рис. 2.23. В этой схеме задано:

$$G_1 = G_2 = G_3 = 0,1 \text{ См}, J_1 = 2 \text{ А}, J_3 = 6 \text{ А}.$$

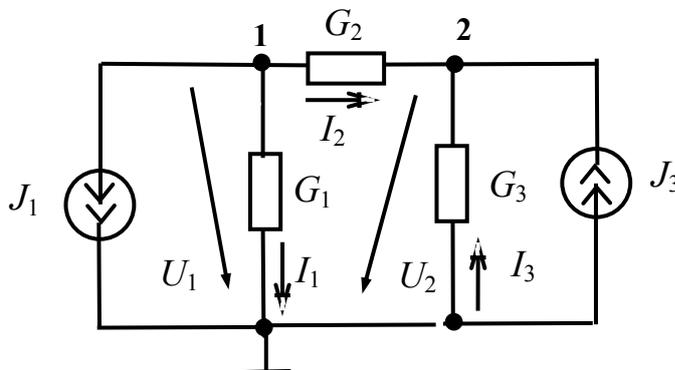


Рис. 2.23

Решение.

1. Выбираем базисный узел и нумеруем остальные узлы.
2. Записываем узловые уравнения по количеству пронумерованных узлов:

$$G_{11}U_1 + G_{12}U_2 = J_{1y};$$

$$G_{21}U_1 + G_{22}U_2 = J_{2y}.$$

3. Определяем коэффициенты системы:

$$G_{11} = G_1 + G_2 = 0,2 \text{ См}; \quad G_{22} = G_2 + G_3 = 0,2 \text{ См};$$

$$G_{12} = G_{21} = -G_2 = -0,1 \text{ См};$$

$$J_{1B} = -J_1 = -2 \text{ А}, \quad J_{2B} = J_3 = 6 \text{ А}.$$

4. Решаем систему уравнений:

$$0,2U_1 - 0,1U_2 = -2;$$

$$-0,1U_1 + 0,2U_2 = 6,$$

и определяем узловые напряжения

$$U_1 = \frac{20}{3} \text{ В}, \quad U_2 = \frac{100}{3} \text{ В}.$$

5. Указываем положительные направления токов и определяем их по закону Ома.

Направление узлового напряжения U_1 совпадает с положительным направлением тока I_1 , поэтому произведение G_1U_1 будет иметь положительный знак

$$I_1 = G_1U_1 = 0,1 \cdot \frac{20}{3} = \frac{2}{3} \text{ А}.$$

Направление тока I_3 противоположно направлению узлового напряжения U_2 , поэтому произведение будет иметь отрицательный знак:

$$I_3 = -G_3U_2 = -0,1 \cdot \frac{100}{3} = -\frac{10}{3} \text{ А}.$$

Напряжение между узлами 1 и 2 $U_{12} = U_1 - U_2$ имеет направление, которое совпадает с направлением тока I_2 , поэтому

$$I_2 = G_2U_{12} = G_2(U_1 - U_2) = 0,1 \cdot \left(\frac{20}{3} - \frac{100}{3} \right) = -\frac{8}{3} \text{ А}.$$

6. Составляем уравнение баланса мощностей в цепи

$$-I_1R_1J_1 - I_3R_3J_3 = R_1I_1^2 + R_2I_2^2 + R_3I_3^2.$$

Подставляя числовые значения, получаем:

$$P_{\text{ист.}} = -\frac{2}{3} \cdot 10 \cdot 2 - \left(-\frac{10}{3} \cdot 10 \cdot 6 \right) = \frac{560}{3} \text{ Вт},$$

$$P_{\text{пр.}} = 10 \left(\frac{2}{3} \right)^2 + 10 \cdot \left(-\frac{8}{3} \right)^2 + 10 \cdot \left(-\frac{10}{3} \right)^2 = \frac{560}{3} \text{ Вт}.$$

Баланс мощностей выполняется, т.е. расчет токов в цепи выполнен верно.

Если электрическая цепь имеет ветвь с источником ЭДС без последовательно соединенного сопротивления, которую нельзя заменить эквивалентным источником тока, то такую цепь также можно рассчитать методом узловых напряжений. Для этого один из узлов, между которыми находится источник ЭДС, принимается за базисный. Тогда узловое напряжение второго узла будет известно и равно значению ЭДС с соответствующим знаком. В таком случае количество неизвестных узловых напряжений сокращается на единицу.

Пример. Определить токи в ветвях электрической цепи, схема которой изображена на рис. 2.24. Параметры элементов заданы:

$$E_2 = 5 \text{ В}, \quad J_1 = 1 \text{ А}, \quad J_3 = 2 \text{ А},$$

$$G_1 = 0,1 \text{ См}, \quad G_2 = 0,2 \text{ См}, \quad G_3 = 0,4 \text{ См}.$$

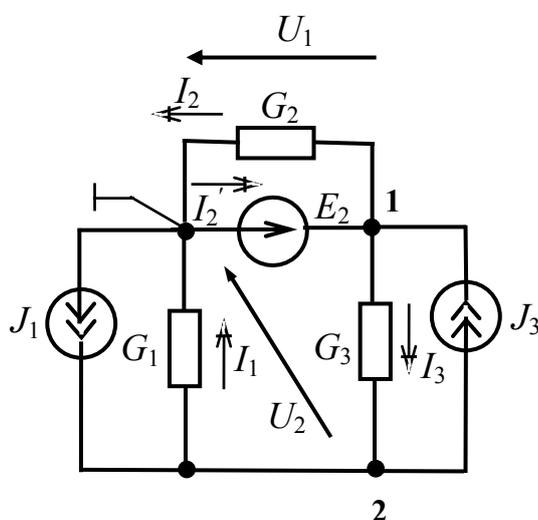


Рис. 2.24

Решение.

1. За базисный выбираем узел, к которому подключен источник ЭДС E_2 , а другие узлы нумеруем.

2. Записываем узловые уравнения:

$$G_{11}U_1 + G_{12}U_2 = J_{1B};$$

$$G_{21}U_1 + G_{22}U_2 = J_{2B}.$$

Ветвь с ЭДС E_2 имеет бесконечно большую проводимость, G_{11} - не определена и поэтому первое уравнение имеет неопределенный коэффициент. Но первое уравнение можно исключить, так как узловое напряжение первого узла известно:

$$U_1 = E_1 = 5 \text{ В}.$$

3. Определяем коэффициенты второго уравнения:

$$G_{21} = -G_3 = -0,4 \text{ См}; \quad G_{22} = G_1 + G_3 = 0,5 \text{ См};$$

$$J_{2B} = J_1 - J_3 = 1 - 2 = -1 \text{ А}.$$

4. После подстановки значений имеем

$$-0,4 \cdot 5 + 0,5 \cdot U_2 = -1, \quad \text{откуда} \quad U_2 = 2 \text{ В}.$$

5. Указываем положительные направления токов в ветвях и определяем их по узловым напряжениям:

$$I_1 = G_1 \cdot U_2 = 0,1 \cdot 2 = 0,2 \text{ A};$$

$$I_3 = G_3(U_1 - U_2) = 0,4(5 - 2) = 1,2 \text{ A};$$

$$I_2 = G_2 U_1 = 0,2 \cdot 5 = 1 \text{ A}.$$

Обоснование метода узловых напряжений дадим на примере цепи, схема которой представлена на рис. 2.25.

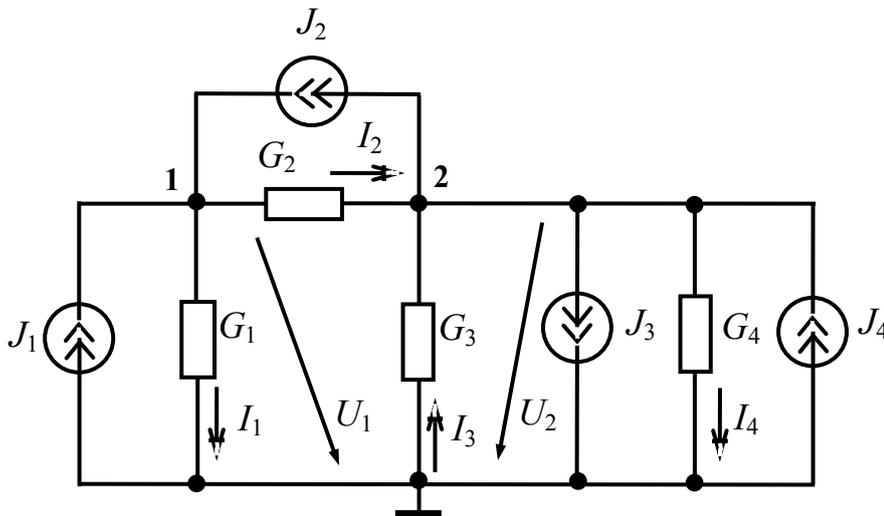


Рис. 2.25. Обоснование метода узловых напряжений

Выбираем базисный узел и для остальных узлов записываем I закон Кирхгофа в виде

$$(1) \quad I_1 + I_2 = J_1 + J_2;$$

$$(2) \quad -I_2 - I_3 + I_4 = J_4 - J_2 - J_3.$$

Выражаем токи в ветвях через узловые напряжения:

$$I_1 = G_1 U_1; \quad I_2 = G_2(U_1 - U_2); \quad I_3 = -G_3 U_2; \quad I_4 = G_4 U_2.$$

Тогда уравнения, составленные по I закону Кирхгофа, приобретают вид:

$$G_1 U_1 + G_2 U_1 - G_2 U_2 = J_1 + J_2;$$

$$-G_2 U_1 + G_2 U_2 + G_3 U_2 + G_4 U_2 = J_4 - J_2 - J_3.$$

После группирования слагаемых с одинаковыми узловыми напряжениями получим:

$$(G_1 + G_2)U_1 - G_2 U_2 = J_1 + J_2;$$

$$-G_2 U_1 + (G_2 + G_3 + G_4)U_2 = J_4 - J_2 - J_3.$$

Введем обозначения:

$$G_{11} = G_1 + G_2; \quad G_{12} = G_{21} = -G_2; \quad G_{22} = G_2 + G_3 + G_4;$$

$$J_{1y} = J_1 + J_2; \quad J_{2y} = J_4 - J_2 - J_3.$$

Перепишем систему:

$$G_{11}U_1 + G_{12}U_2 = J_{1y};$$

$$G_{21}U_1 + G_{22}U_2 = J_{2y}.$$

Таким образом, система уравнений приобретает стандартный вид уравнений метода узловых напряжений, решение которой рассмотрено выше.

Лекция 5

План лекции:

2.5. Принцип взаимности.

2.6. Принцип наложения (суперпозиции).

2.7. Двухполюсники. Теоремы об активном двухполюснике.

2.5. Принцип взаимности.

Этот принцип выполняется только для линейных электрических цепей с одним источником энергии и состоит в следующем:

если ЭДС, которая действует в первой условной ветви, вызывает во второй ветви ток I , то эта же ЭДС, если ее перенести в другую условную ветвь, вызовет в первой условной ветви такой же ток I .

Чтобы доказать этот принцип, обратимся к схеме электрической цепи рис. 2.26.

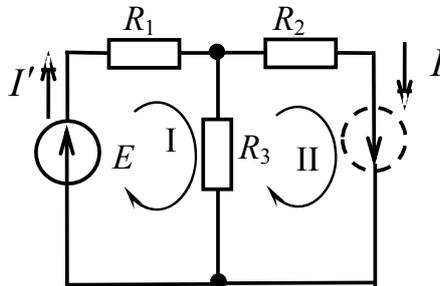


Рис. 2.26. Принцип взаимности

В начале определим ток I во второй ветви, затем перенесем источник ЭДС во вторую ветвь, направим его по току и определим ток I' в первой условной ветви. Если токи совпадают, то наше утверждение верно.

Задачу будем решать методом контурных токов. Решение матричного уравнения второго порядка имеет вид:

$$\mathbf{I} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{E} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} R_{22} & -R_{12} \\ -R_{21} & R_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix},$$

где Δ - определитель матрицы сопротивлений цепи.

Контурный ток I_{2K} совпадает с током I во второй ветви

$$I = I_{2K} = -R_{21} \frac{E}{\Delta} + R_{11} \frac{0}{\Delta} = -R_{21} \frac{E}{\Delta}.$$

Если перенести ЭДС во вторую условную ветвь, то ток в первой ветви можно определить так

$$I = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} R_{22} & -R_{12} \\ -R_{21} & R_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ E \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$I' = I_{1K} = -R_{22} \cdot \frac{0}{\Delta} - R_{12} \cdot \frac{E}{\Delta} = -R_{12} \frac{E}{\Delta}.$$

Поскольку $R_{12} = R_{21}$, то $I' = I$, что и требовалось доказать.

Принцип взаимности используется в тех случаях, когда перенос источника ЭДС в другую ветвь электрической цепи значительно облегчает расчет цепи.

2.6. Принцип наложения (суперпозиции).

Принцип наложения действительный для токов и напряжений линейных электрических цепей и состоит в следующем:

ток (напряжение) какой-либо ветви электрической цепи равен алгебраической сумме токов (напряжений) в этой ветви, вызванных каждым источником энергии в отдельности.

Для обоснования этого положения рассмотрим двухконтурную схему с тремя источниками ЭДС (рис. 2.27).

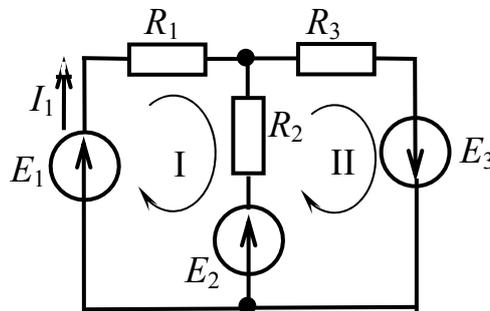


Рис. 2.27. Принцип наложения

Определим, например, ток в первой ветви, воспользовавшись методом контурных токов.

Решение матричного уравнения второго порядка имеет вид

$$\mathbf{I} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{E} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} R_{22} & -R_{12} \\ -R_{21} & R_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{1K} \\ E_{2K} \end{pmatrix},$$

где $E_{1K} = E_1 - E_2$, $E_{2K} = E_2 + E_3$.

Ток в первой ветви

$$I_1 = I_{1K} = \frac{1}{\Delta}(E_{1K}R_{22} - E_{2K}R_{12}) = \frac{1}{\Delta}E_1R_{22} - \frac{1}{\Delta}E_2R_{22} - \frac{1}{\Delta}E_2R_{12} - \frac{1}{\Delta}E_3R_{12} =$$

$$= \frac{1}{\Delta}R_{22}E_1 - \frac{1}{\Delta}(R_{22} + R_{12})E_2 - \frac{1}{\Delta}R_{12}E_3.$$

Таким образом, ток в первой ветви состоит из трех слагаемых. Первое слагаемое обусловлено ЭДС E_1 , второе — E_2 , третье — E_3 . Предположим, что вторая и третья ЭДС отсутствуют, т.е. $E_2=0$ и $E_3=0$. Тогда ток I_1 определяется источником E_1 . Если отсутствуют E_1 и E_3 , то ток I_1 определяется лишь источником E_2 , если отсутствуют E_1 и E_2 , то — только E_3 .

Отсюда вытекает, что ток первой ветви определяется суммой токов, обусловленных действием каждой ЭДС в отдельности. Если ввести обозначения

$$I_1' = \frac{1}{\Delta}R_{22}E_1, \quad I_1'' = -\frac{1}{\Delta}(R_{22} + R_{12})E_2, \quad I_1''' = -\frac{1}{\Delta}R_{12}E_3$$

и назвать эти токи частичными токами, то принцип наложения можно сформулировать таким образом:

ток в любой ветви электрической цепи равен алгебраической сумме частичных токов, т.е.

$$I_1 = I_1' + I_1'' + I_1'''.$$

Аналогично это утверждение можно доказать и для токов в других двух ветвях.

При расчете частичных токов от каждого источника отдельно остальные источники полагаются равными нулю. При этом источники ЭДС закорачиваются, а источника ТДС — отключаются.

Пример. Методом наложения определить токи в ветвях электрической цепи, схема которой изображена на рис. 2.28, а.

Решение.

Разбиваем полную схему на две частичные (по количеству источников) (рис. 2.28, б и 2.28, в). В частичных схемах указываем действительные направления токов. Это можно легко сделать, поскольку частичные схемы содержат лишь по одному источнику энергии. Определяем токи в первой частичной схеме (рис. 2.28, б):

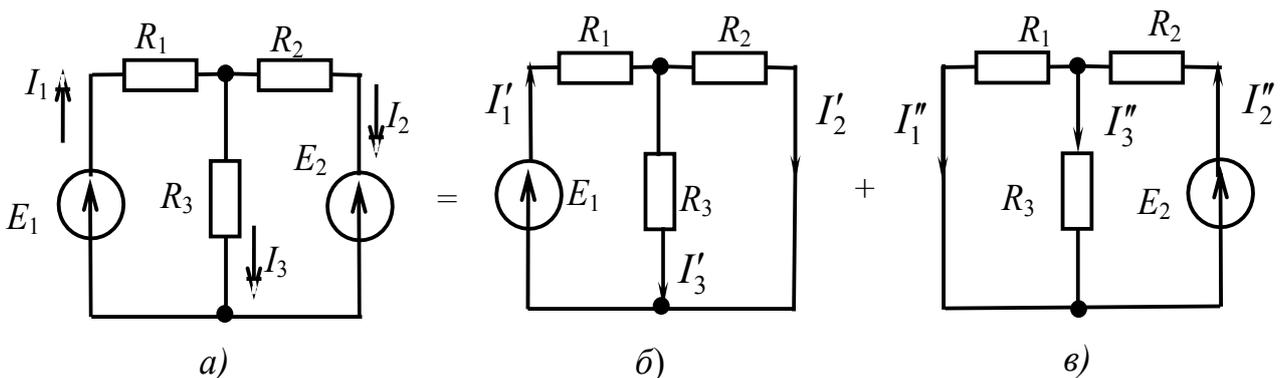


Рис. 2.28

$$I_1' = \frac{E_1}{R_1 + R_{23}}, \quad I_2' = I_1' \frac{R_3}{R_2 + R_3}, \quad I_3' = I_1' \frac{R_2}{R_2 + R_3},$$

где $R_{23} = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3},$

и во второй (рис. 2.28, в):

$$I_2'' = \frac{E_2}{R_2 + R_{13}}, \quad I_1'' = I_2'' \frac{R_3}{R_1 + R_3}, \quad I_3'' = I_2'' \frac{R_1}{R_1 + R_3},$$

где $R_{13} = \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_3}.$

Указываем положительные направления токов в исходной схеме и определяем их согласно принципу наложения как алгебраическую сумму частичных токов

$$I_1 = I_1' - I_1'', \quad I_2 = I_2' - I_2'', \quad I_3 = I_3' + I_3''.$$

Принцип наложения широко используется для расчета электрических цепей негармонического периодического тока, в которых действуют гармонические источники разной частоты. Этот принцип положен в основу таких спектральных методов анализа прохождения сигнала через линейные электрические цепи, как частотный, временной и операционный.

2.7. Двухполюсники. Теоремы об активном двухполюснике.

Электрическая цепь, если ее рассматривать относительно двух зажимов (полюсов), носит название двухполюсника.

Примеры двухполюсников: резистор, катушка индуктивности, электрическая лампа накаливания, телевизор, если его рассматривать по отношению к источнику питания, любая электрическая цепь, из которой выведены два внешних вывода (полюса).

Двухполюсники на схемах изображают в виде квадрата или прямоугольника, из которого выходят два вывода (полюса) (рис. 2.29, а).

Двухполюсники делятся на пассивные и активные.

Двухполюсник называется пассивным, если на его выводах отсутствует любое напряжение, и активным – если напряжение есть. Пассивный двухполюсник обозначается на схемах буквой “П” (рис. 2.29, б) и характеризуется лишь одним параметром - входным сопротивлением $R_{вх}$. Активный двухполюсник обозначается на схемах буквой “А” (рис. 2.29, в) и характеризуется двумя параметрами: напряжением холостого хода U_x и входным сопротивлением $R_{вх}$.

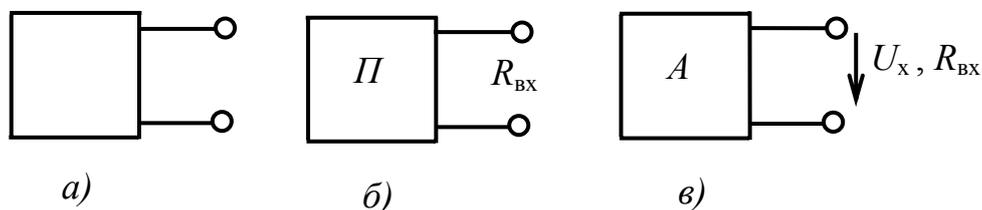


Рис. 2.29

Пассивный двухполюсник или не содержит в себе источников энергии, или содержит источники энергии, которые по отношению к внешним выводам скомпенсировали друг друга.

Понятно, что любой пассивный двухполюсник можно заменить эквивалентным сопротивлением (рис. 2.30), которое равно входному сопротивлению двухполюсника. Чем же можно заменить активный двухполюсник, который характеризуется двумя параметрами U_x и $R_{вх}$? Ответ на этот вопрос более 100 лет тому дали независимо друг от друга два ученых, с именами которых и связаны названия двух теорем, получившие названия теорем об активном двухполюснике.

Теорема Тевенена (теорема об эквивалентном источнике напряжения): любой активный двухполюсник можно заменить эквивалентным источником

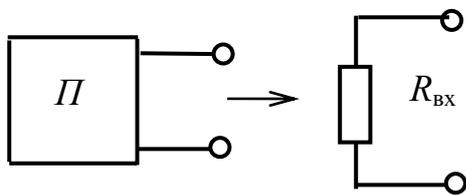


Рис. 2.30

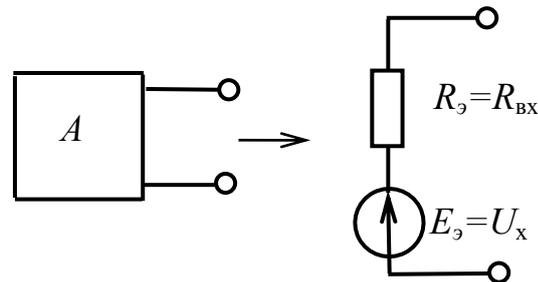


Рис. 2.31

напряжения, ЭДС которого равна напряжению холостого хода, а эквивалентное сопротивление – входному сопротивлению соответствующего пассивного двухполюсника (рис. 2.31). Соответствующий пассивный двухполюсник можно получить из активного путем закорачивания источников ЭДС и отключения источников ТДС (т.е. если положить все источники энергии активного двухполюсника равными нулю).

Доказательство теоремы Тевенена.

Подключим к полюсам активного двухполюсника источник напряжения с ЭДС $E = U_x$ и сопротивлением R_n (рис. 2.32, а). Направим ЭДС навстречу напряжению холостого хода. Понятно, что ток I' через сопротивление нагрузки R_n будет равен нулю, так как ЭДС и напряжение U_x взаимно компенсируют друг друга.

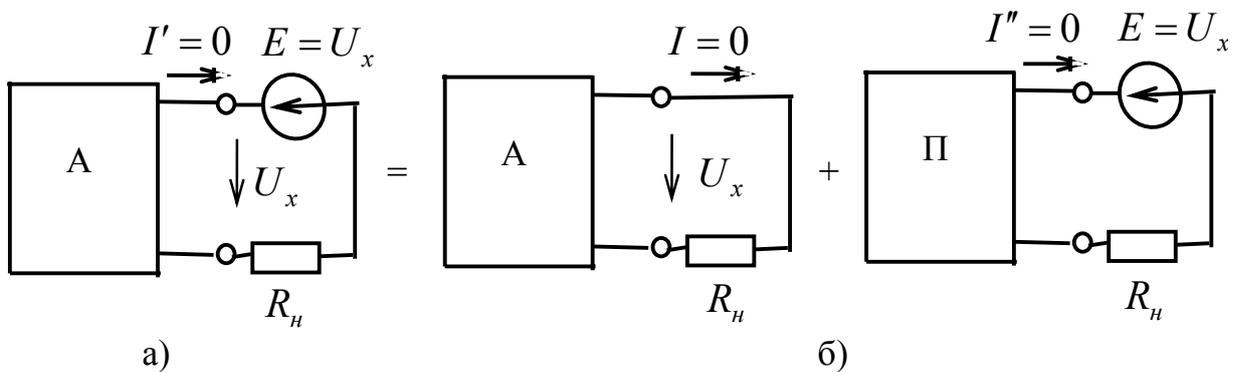


Рис. 2.32. К доказательству теоремы Тевена

Для расчета тока I' воспользуемся принципом наложения. Для этого разобьем схему на две частичные схемы как показано на рис. 2.32, б.

Согласно принципу наложения

$$I' = I - I'' = 0, \quad \text{откуда} \quad I = I'' = \frac{U_x}{R_{\text{вх}} + R_H}.$$

Этому уравнению отвечает схема (рис. 2.33, а), которая будет эквивалентна схеме рис. 2.33, б, что и подтверждает справедливость теоремы Тевенена.

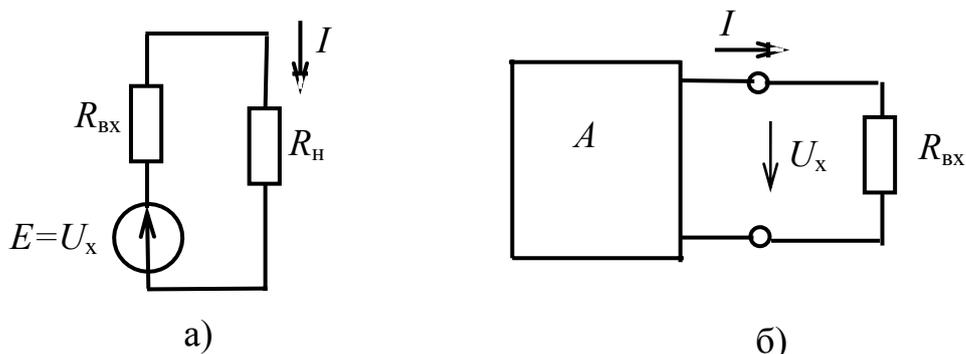


Рис. 2.33

Пример. Определить параметры эквивалентного источника напряжения для активного двухполюсника, схема которого изображена на рис. 2.34.

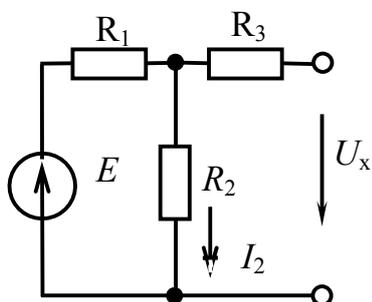


Рис. 2.34

По схеме активного двухполюсника рассчитаем напряжение U_x , которое и будет равно E_0 :

$$U_x = U_{R_2} = R_2 I_2 = \frac{R_2 E}{R_1 + R_2} = E_0.$$

Для расчета R_0 изобразим схему соответствующего пассивного двухполюсника (рис. 2.35) и определим входное сопротивление $R_{\text{вх}}$.

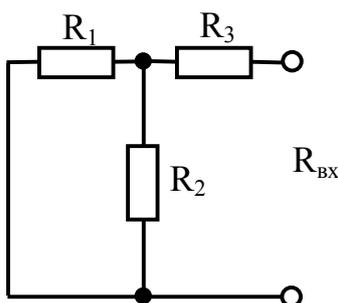


Рис. 2.35

$$R_{\text{ex}} = R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = R_9.$$

Теорема Нортна (теорема об эквивалентном источнике тока): любой активный двухполюсник можно заменить эквивалентным источником тока, ТДС которого равна току короткого замыкания двухполюсника, а эквивалентное сопротивление – входному сопротивлению соответствующего пассивного двухполюсника (рис. 2.36).

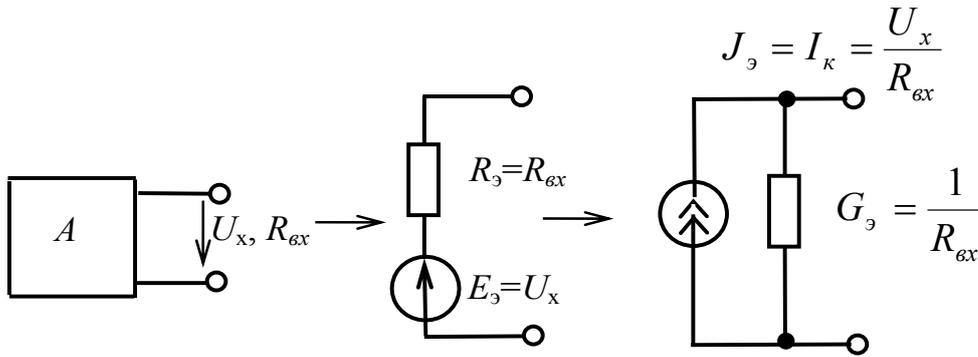


Рис. 2.36

Для доказательства этой теоремы можно воспользоваться теоремой Тевенена, а потом заменить источник напряжения эквивалентным источником тока.

Теоремы об активном двухполюснике (Тевенена и Нортна) используются в том случае, когда надо определить ток или напряжение в одной ветви сложной электрической цепи. Для этого сопротивление R , в котором надо определить ток, исключают из схемы электрической цепи и схему, которая осталась, относительно разомкнутых зажимов рассматривают как активный двухполюсник. Далее, если задача решается согласно теореме Тевенена, то по схеме активного двухполюсника определяют параметры эквивалентного источника напряжения $E_9 = U_x$ и $R_9 = R_{\text{ex}}$. После чего в эквивалентную схему активного двухполюсника возвращают сопротивление R (рис. 2.37) и ток в нем находится по формуле

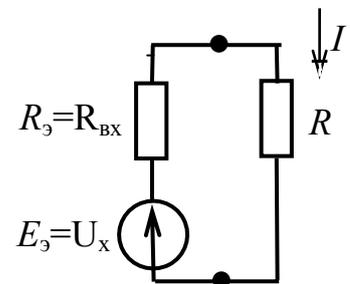


Рис. 2.37

$$I = \frac{U_x}{R_{\text{ex}} + R}.$$

Если задача решается по теореме Нортна, то по схеме активного двухполюсника определяют параметры эквивалентного источника тока $J_9 = I_k$ и $R_9 = R_{\text{ex}}$. После чего в эквивалентную схему активного двухполюсника возвращают сопротивление R (рис. 2.38) и ток в нем находится по формуле

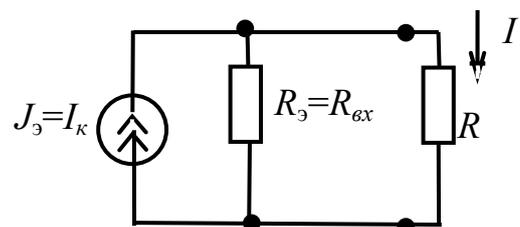


Рис. 2.38

$$I = I_k \frac{R_{ex}}{R_{ex} + R}$$

Пример. В электрической цепи, схема которой представлена на рис. 2.39, определить ток I_2 с помощью теоремы Тевенена и Нортон.

Исключаем сопротивление R_2 , в котором необходимо определить ток, и относительно разомкнутых зажимов рассматриваем оставшуюся схему как активный двухполюсник (рис. 2.40).

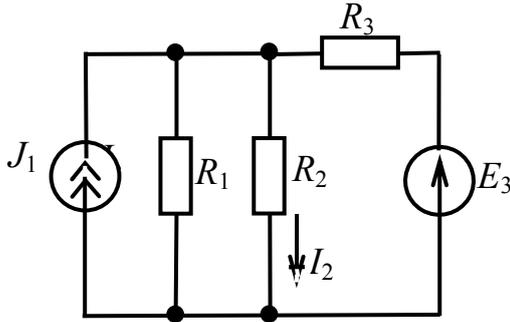


Рис. 2.39

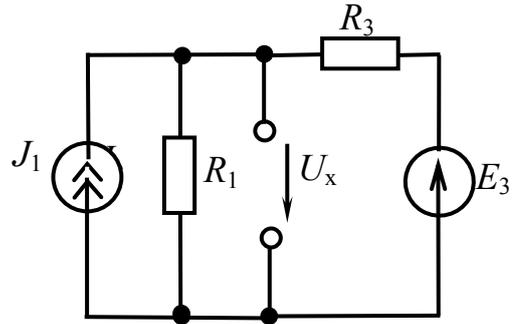


Рис. 2.40

По теореме Тевенена заменим активный двухполюсник эквивалентным источником напряжения, для чего определим $E_9 = U_x$ и $R_9 = R_{ex}$. Для определения U_x сделаем замену источника тока J_1 с сопротивлением R_1 эквивалентным источником напряжения $E_1 = R_1 J_1$ с сопротивлением R_1 (рис. 2.41).

Запишем второй закон Кирхгофа для внешнего контура

$$E_3 - E_1 = (R_3 + R_1)I_{3x}$$

и определим ток

$$I_{3x} = \frac{E_3 - E_1}{R_1 + R_3}$$

Далее запишем второй закон Кирхгофа для разомкнутого контура, который содержит напряжение U_x :

$$E_3 = R_3 I_{3x} + U_x$$

Откуда

$$U_x = E_3 - R_3 I_{3x}$$

Для определения эквивалентного сопротивления изображаем схему соответствующего пассивного двухполюсника (рис. 2.42).

Тогда

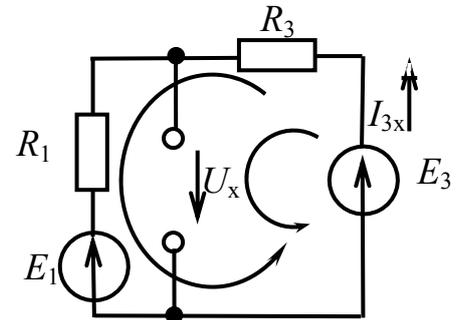


Рис. 2.41

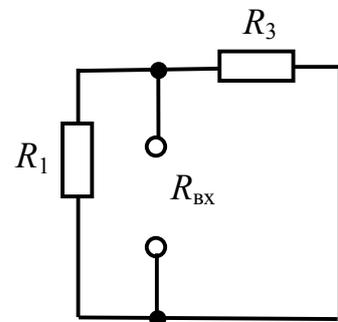


Рис. 2.42

$$R_3 = R_{\text{ex}} = \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_3}.$$

Возвращаем на место, но в эквивалентную схему источника напряжения, сопротивление R_2 (рис. 2.43) и определяем ток I_2 по формуле

$$I_2 = \frac{U_x}{R_{\text{ex}} + R_2}.$$

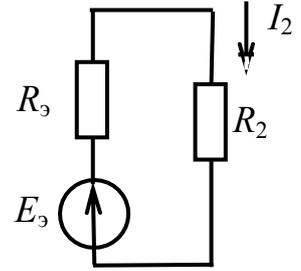


Рис. 2.43

Для определения тока по теореме Нортона закоротим зажимы активного двухполюсника и определим ток короткого замыкания I_k (рис. 2.44). Провод с током I_k разделит схему на две независимых части. Поэтому ток I_k можно получить как сумму токов от каждой части схемы отдельно.

$$I_k = J_1 + \frac{E_3}{R_3}.$$

Возвращаем на место, но в эквивалентную схему источника тока, сопротивление R_2 (рис. 2.45) и определяем ток I_2 по формуле:

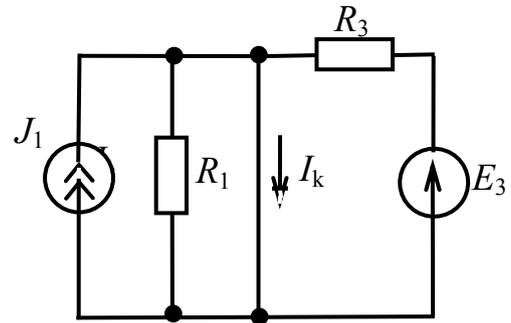


Рис. 2.44

$$I_2 = I_k \frac{R_{\text{ex}}}{R_{\text{ex}} + R_2}.$$

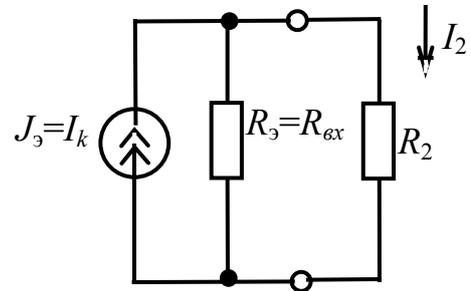


Рис. 2.45

РАЗДЕЛ 3

ГАРМОНИЧЕСКИЙ РЕЖИМ В ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

Лекция 6

План лекции:

- 3.1. Гармоническое колебание и его параметры.
- 3.2. Действующее, среднее и среднее по модулю значения токов и напряжений.
- 3.3. Метод комплексных амплитуд.

3.1. Гармоническое колебание и его параметры.

Гармонический режим является наиболее распространенным режимом работы электроэнергетических установок и поэтому на практике встречается наиболее часто. Это обусловлено экономическими показателями источников гармонического тока (синхронных генераторов тепловых, атомных и гидравлических электростанций).

Для значительной части современных специальностей, таких как радиоэлектроника, компьютерная техника, связь, автоматические системы управления гармонический режим является основой для изучения более сложных процессов, связанных с передачей информации, сигналов управления и команд.

Считается, что гармоническое колебание имеет место на протяжении времени $-\infty < t < +\infty$ и таким образом само по себе не передает никакой информации. Но оно используется как несущая функция при кодировании информации, в результате чего колебание перестает быть гармоническим.

Гармоническим называется колебание, которое изменяется во времени по закону синуса или косинуса

$$a(t) = A_m \sin(\omega t + \alpha) = A_m \cos(\omega t + \alpha - \frac{\pi}{2}).$$

Временной график гармонического колебания приведен на рис. 3.1.

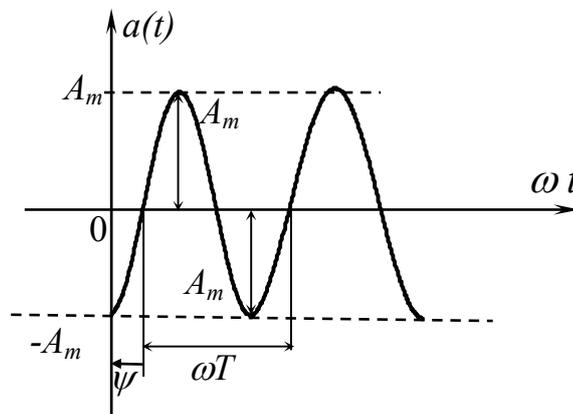


Рис. 3.1

Гармоническое колебание характеризуется тремя параметрами.

Амплитуда $A_m(I_m, U_m, E_m, J_m)$ - наибольшее значение гармонической функции, $A_m > 0$.

Угловая частота $\omega = 2\pi/T$, где T – период гармонического колебания, т.е. время, на протяжении которого происходит полный цикл синусоиды. Единицей угловой частоты является радиан деленный на секунду (rad/c). Величина, обратная периоду, обозначается буквой $f = 1/T$ и называется частотой гармонического колебания. Единица измерения частоты – герц: $[f] = 1/c = Гц$. Таким образом, угловая частота $\omega = 2\pi f$.

В странах Европы принят стандарт частоты электроэнергетических систем $f = 50 Гц$ ($\omega = 314 rad/c$), в США – 60 Гц.

Аргумент $(\omega t + \psi)$ называют фазой гармонического колебания. Значение фазы для момента времени $t = 0$, т.е. $(\omega t + \psi)|_{t=0} = \psi$ - называют начальной фазой. Единица измерения начальной фазы – радиан: $[\psi] = rad$. Начальная фаза показывает насколько смещено начало синусоиды (ближайшая точка перехода синусоиды с “-” на “+”) от начала координат.

Если один из трех параметров A_m , ω или ψ перестает быть постоянной величиной, то такое колебание не будет гармоническим. Примером могут быть колебания, которые используются для передачи информации. В них один или сразу два параметра гармонического колебания изменяются по закону информации, которая передается. Такие колебания называются модулированными.

3.2. Действующее, среднее и среднее по модулю значения токов и напряжений.

Среднее значение периодической функции определяется выражением

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T a(t) dt.$$

Для периодических функций, симметричных относительно оси абсцисс, к которым принадлежит и гармоническое колебание, среднее значение за период $A_0 = 0$.

Среднее выпрямленное значение периодической функции определяется выражением

$$A_{cp} = \frac{1}{T} \int_0^T |a(t)| dt.$$

Для гармонической функции

$$A_{cp} = \frac{1}{T} \int_0^T |A_m \sin(\omega t + \psi)| dt = \frac{2}{\pi} A_m = 0,637 A_m.$$

Для характеристики энергетического действия переменного тока вводят понятие действующего значения.

Действующим (эффективным) значением переменного тока называют такое значение постоянного тока I , которое за время одного периода выделяет в сопротивлении R такое же количество тепла, как и переменный ток.

Численно действующее значение определяется как среднеквадратическое значение переменного тока за период

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt}.$$

Для того чтобы подтвердить физический смысл представленного выше определения действующего значения переменного тока, возведем в квадрат обе части уравнения и умножим на некоторое сопротивление R . Получим

$$RI^2T = \int_0^T Ri^2(t) dt.$$

В левой части уравнения стоит энергия, которая выделяется в сопротивлении R за период T при протекании через него постоянного тока I . В правой части уравнения – энергия, которая выделяется переменным током $i(t)$ в сопротивлении R за то же время. Таким образом, подтверждается энергетическая эквивалентность действия обоих токов.

Понятие действующего значения относится не только к гармоническим, но и к любым другим периодическим токам. Им пользуются также по отношению к напряжениям, ЭДС и ТДС.

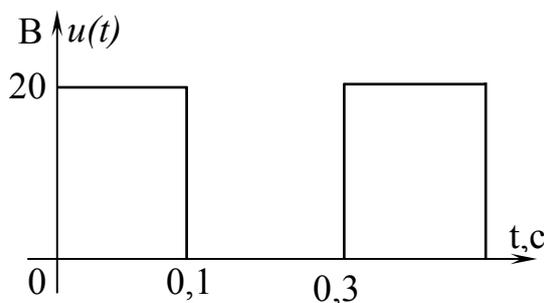
Определим действующее значение гармонического тока:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \sin^2(\omega t + \psi) dt} = \sqrt{\frac{I_m^2}{2T} \int_0^T [1 - \cos(2\omega t + 2\psi)] dt} = I_m / \sqrt{2}.$$

Для гармонического тока действующее значение меньше амплитудного в $\sqrt{2}$ раз. Соответственно для напряжения, ЭДС и ТДС:

$$U = U_m / \sqrt{2}, \quad E = E_m / \sqrt{2}, \quad J = J_m / \sqrt{2}.$$

Для сравнения определим действующее значение периодического негармонического напряжения, график которого представлен на рис. 3.2.



$$U = \sqrt{\frac{1}{0,3} \int_0^{0,1} 20^2 dt} = \frac{20}{\sqrt{3}} \text{ В}.$$

Рис. 3.2

3.3. Метод комплексных амплитуд.

3.3.1. Общие положения.

Метод комплексных амплитуд был предложен для расчета электрических цепей гармонического тока американскими инженерами Ч.П. Штейнмецем и А.Э. Конели в конце 19 столетия.

Сущность метода - это замена системы линейных интегро-дифференциальных уравнений, составленных по законам Кирхгофа для мгновенных значений гармонических токов, напряжений, ЭДС и ТДС, системой линейных алгебраических уравнений, но в комплексной форме. Прежде чем перейти к изложению метода комплексных амплитуд, приведем некоторые сведения из курса математики, которые нужны для понимания этого вопроса.

- **Комплексные числа**

Величина $i = \sqrt{-1}$ называется мнимой единицей. Но в электротехнике буквой i обозначается мгновенное значение переменного тока и потому, чтобы не путать их, в электротехнике договорились обозначать мнимую единицу $j = \sqrt{-1}$.

Произведение мнимой единицы на действительное число - jb называется мнимым числом.

Число $a + jb$, которое состоит из действительной и мнимой части, называется комплексным числом, записанным в алгебраической форме. Комплексное число можно изобразить в комплексной плоскости. Комплексная плоскость - это Декартова система координат, где по оси абсцисс откладываются действительные числа, а по оси ординат - мнимые числа.

В показательной форме комплексное число имеет вид $Ae^{j\varphi}$, где A - модуль комплексного числа, φ - аргумент.

Переход от алгебраической к показательной форме осуществляется следующим образом:

$$A = \sqrt{a^2 + b^2}; \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}.$$

Если модуль A определяется однозначно, то при определении аргумента надо учитывать четверть, в которой находится комплексное число $a + jb$. Если обозначить α_M - арктангенс отношения мнимой и действительной части комплексного числа, взятого по модулю

$$\alpha_M = \operatorname{arctg} |b/a|,$$

то для правильности определения аргумента φ следует пользоваться рис. 3.3.

Переход от показательной формы комплексного числа к алгебраической однозначный и осуществляется с помощью формулы Эйлера

$$Ae^{j\varphi} = A \cos \varphi + jA \sin \varphi = a + jb.$$

Приведем некоторые соотношения, которые будут полезными в дальнейшем:

$$\pm j = e^{\pm j\frac{\pi}{2}}; \quad 1 = e^{j0}; \quad -1 = e^{\pm j\pi}; \quad j^2 = -1; \quad j^3 = -j; \quad j^4 = 1;$$

$$\frac{1}{j} = -j; \quad |\pm j| = 1; \quad |e^{\pm j\varphi}| = 1.$$

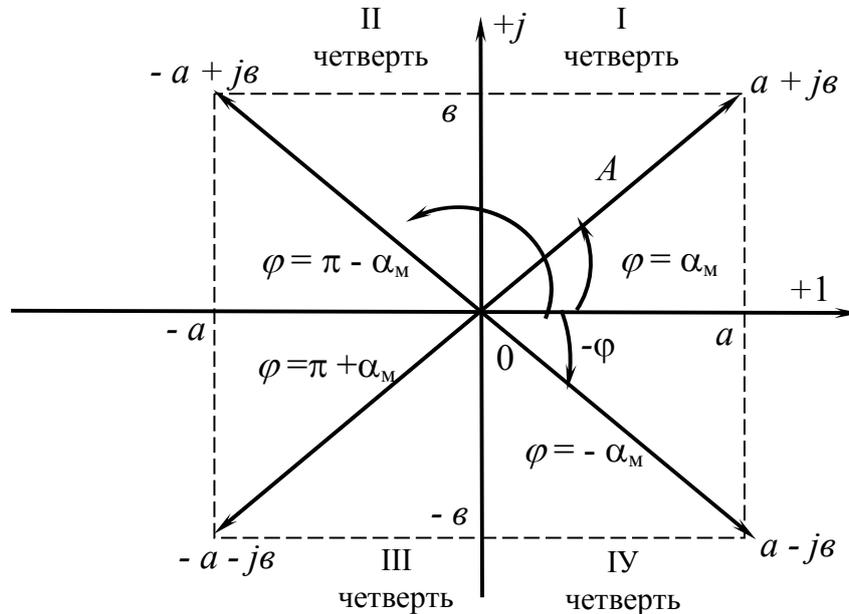


Рис. 3.3

3.3.2. Комплексное преобразование.

Гармоническую функцию времени $a(t)$ назовем оригиналом.

Тогда комплексное число, которое определяется интегральным преобразованием для оригинала, записанного через синус

$$\dot{A}_m = j \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} A_m \sin(\omega t + \psi) e^{-j\omega t} dt = A_m e^{j\psi},$$

или через косинус

$$\dot{A}_m = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} A_m \cos(\omega t + \psi) e^{-j\omega t} dt = A_m e^{j\psi},$$

называется комплексной амплитудой.

Комплексная амплитуда - это комплексное число, модуль которого равен амплитуде гармонического колебания, а аргумент - начальной фазе. Как любое комплексное число комплексную амплитуду можно изобразить в комплексной плоскости (рис. 3.4).

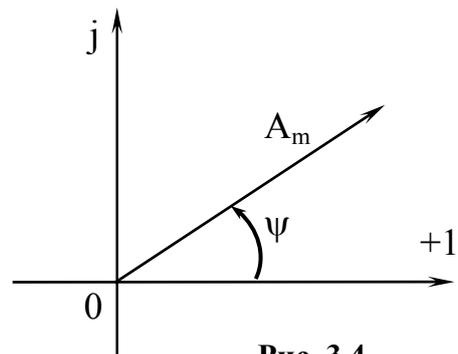


Рис. 3.4

Сокращенно комплексное преобразование будем обозначать

$$a(t) \xrightarrow{K} \dot{A}_m,$$

т.е. оригиналу $a(t)$ соответствует комплексная амплитуда (комплексное изображение оригинала) \dot{A}_m .

Свойства комплексного преобразования.

Если оригиналу $a(t) \xrightarrow{K} \dot{A}_m$, то

1. $Ca(t) \xrightarrow{K} C\dot{A}_m$, где C – постоянная величина.

2. $\sum_n a_n(t) \xrightarrow{K} \sum_n \dot{A}_{mn}$.

3. $\frac{d}{dt} a(t) \xrightarrow{K} j\omega \dot{A}_m$.

4. $\int_0^t a(t) dt \xrightarrow{K} \frac{1}{j\omega} \dot{A}_m$.

3.3.3. Комплексная схема замещения. Закон Ома в комплексной форме.

Перейдем к изложению сущности метода комплексных амплитуд. Рассмотрим электрическую цепь с последовательно соединенными элементами R , L и C (последовательный контур) (рис. 3.5), на входе которого действует гармоническое напряжение $u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$.

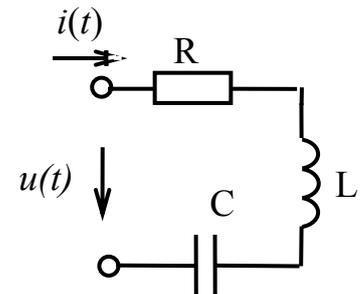


Рис. 3.5

Запишем второй закон Кирхгофа для мгновенных значений

$$Ri(t) + \frac{Ldi(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt = U_m \sin(\omega t + \psi_u). \quad (3.1)$$

Поскольку производная, а также интеграл от гармонической функции являются гармоническими функциями той же частоты, то ток и все напряжения в цепи также являются гармоническими функциями.

Для определения тока $i(t)$ необходимо решить линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка. Решение такого уравнения известно и не вызывает особых трудностей. Но ведь это наиболее простая электрическая цепь. Если предположить, что реальные электрические цепи имеют не одну ветвь, а намного больше, то необходимо будет решать уже систему дифференциальных уравнений, что является намного более сложной задачей. Чтобы упростить задачу, поступим таким образом.

Применим к левой и правой части уравнения (3.1) комплексное преобразование и воспользуемся его свойствами.

Имеем:

$$R\dot{I}_m + j\omega L\dot{I}_m + \frac{1}{j\omega C}\dot{I}_m = \dot{U}_m, \quad (3.2)$$

где $\dot{I}_m = I_m e^{j\psi_i}$ - комплексная амплитуда тока в цепи,

$\dot{U}_m = U_m e^{j\psi_u}$ - комплексная амплитуда напряжения на входе электрической цепи.

Первое слагаемое уравнения (3.2) назовем комплексной амплитудой напряжения на сопротивлении и обозначим

$$\dot{U}_{mR} = R\dot{I}_m = RI_m e^{j\psi_i} = U_{mR} e^{j\psi_{uR}}.$$

Видно, что $\psi_{uR} = \psi_i$, т.е. ток и напряжение на сопротивлении совпадают по фазе. Введем понятие векторной диаграммы.

Изображение комплексных амплитуд токов и напряжений в комплексной плоскости называется **векторной диаграммой**. Векторная диаграмма дает наглядное представление о соотношении между токами и напряжениями в электрической цепи и используется для более глубокого понимания процессов, которые имеют место в электрической цепи. Для сложных электрических цепей векторная диаграмма строится таким образом, чтобы она отражала первый или второй законы Кирхгофа на комплексной плоскости.

На рис. 3.6, а и б – изображены соответственно временная и векторная диаграммы тока и напряжения на сопротивлении R .

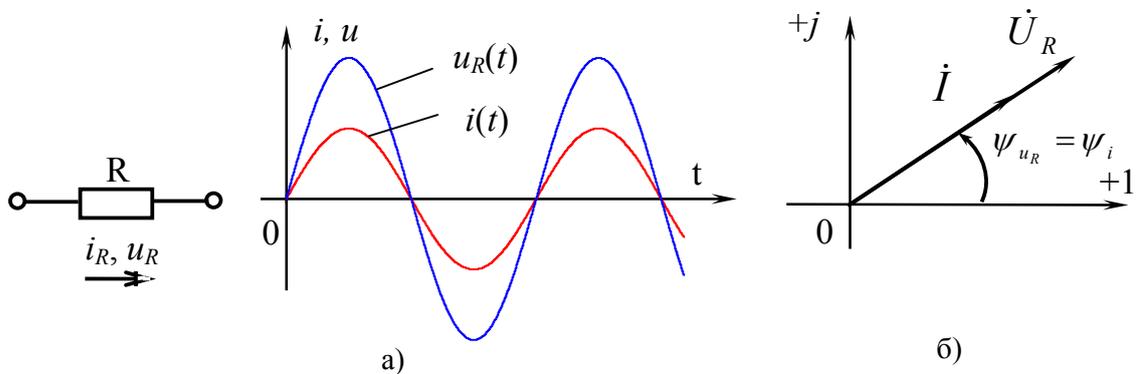


Рис. 3.6. Ток и напряжение на сопротивлении совпадают по фазе

Второе слагаемое в уравнении (3.2) назовем комплексной амплитудой напряжения на индуктивности и обозначим

$$\dot{U}_{mL} = j\omega L\dot{I}_m = \omega L I_m e^{j\psi_i} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} = \omega L I_m e^{j(\psi_i + \frac{\pi}{2})} = U_{mL} e^{j\psi_{uL}},$$

где $U_{mL} = \omega L I_m$, $\psi_{uL} = \psi_i + \frac{\pi}{2}$, т.е. напряжение на индуктивности опережает ток по фазе на угол 90° .

На рис. 3.7, а и б, изображены соответственно временная и векторная диаграммы тока и напряжения на индуктивности.

Введем обозначения:

$\underline{Z}_L = j\omega L = jX_L$ - комплексное сопротивление индуктивности;

$X_L = \omega L$ - сопротивление индуктивности или индуктивное сопротивление.

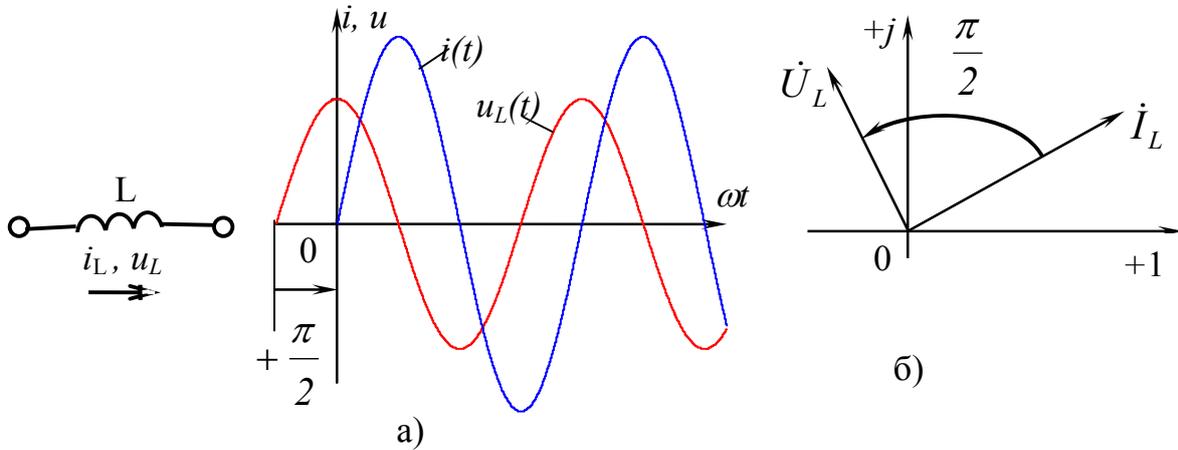


Рис. 3.7. Напряжение на индуктивности опережает ток по фазе на угол 90°

На рис. 3.8, а и б представлены зависимости активного и индуктивного сопротивлений от угловой частоты. На высоких частотах сопротивления реаль-

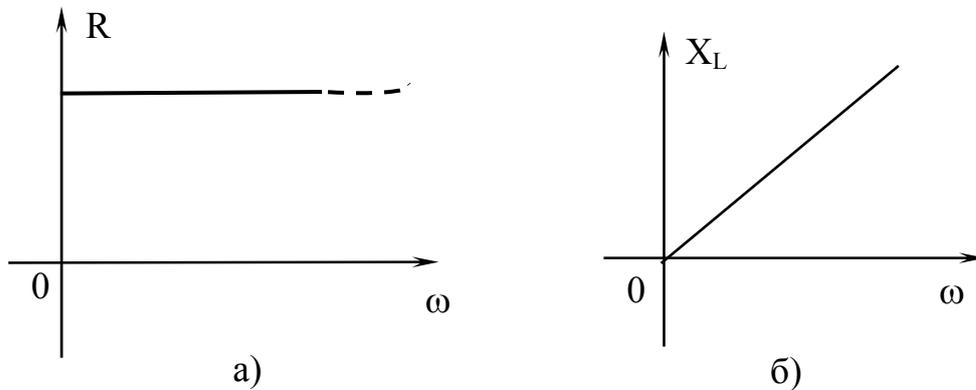


Рис. 3.8

ных элементов - резисторов увеличиваются за счет скин-эффекта.

Третье слагаемое в уравнении (3.2) назовем комплексной амплитудой напряжения на емкости и обозначим.

$$\dot{U}_{mC} = \frac{1}{j\omega C} \dot{I}_m = \frac{1}{\omega C} I_m e^{j\psi_i} \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\omega C} I_m e^{j(\psi_i - \frac{\pi}{2})} = U_{mc} e^{j\psi_{uC}},$$

где $U_{mC} = \frac{1}{\omega C} I_m$, а $\psi_{uC} = \psi_i - \frac{\pi}{2}$.

Таким образом, напряжение на емкости отстает от тока по фазе на угол 90° .

На рис. 3.9, а и б, изображены соответственно временная и векторная диаграммы тока и напряжения на емкости.

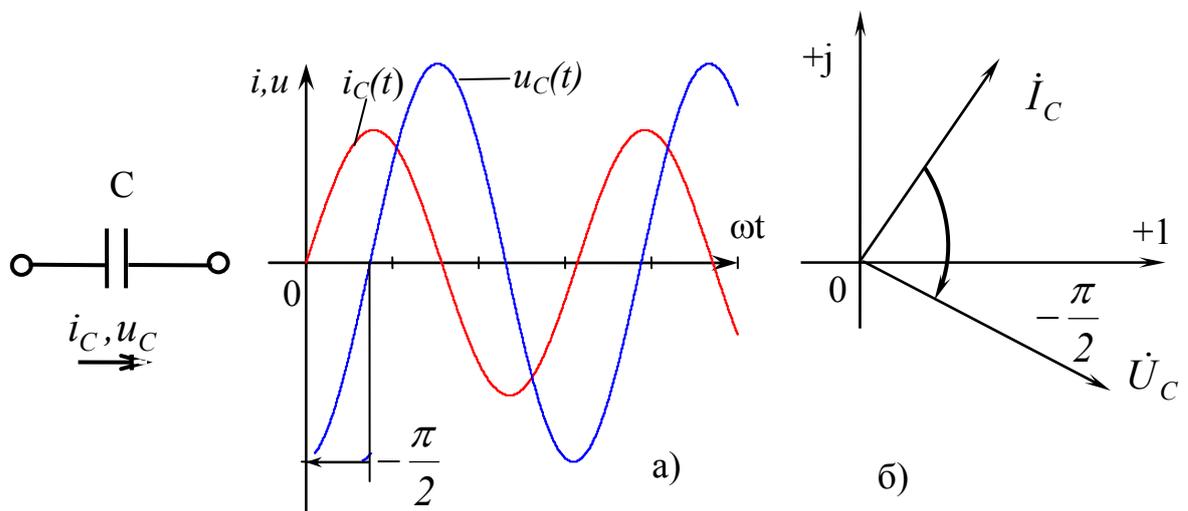


Рис. 3.9. Напряжение на емкости отстает от тока по фазе на угол 90°

Введем обозначения:

$$\underline{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} = -jX_C \text{ - комплексное сопротивление емкости,}$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} \text{ - сопротивление емкости или емкостное сопротивление.}$$

На рис. 3.10 показана зависимость емкостного сопротивления от угловой частоты.

На основании уравнения (3.2), а также введенных обозначений можно составить так называемую комплексную схему замещения электрической цепи гармонического тока (рис. 3.11).

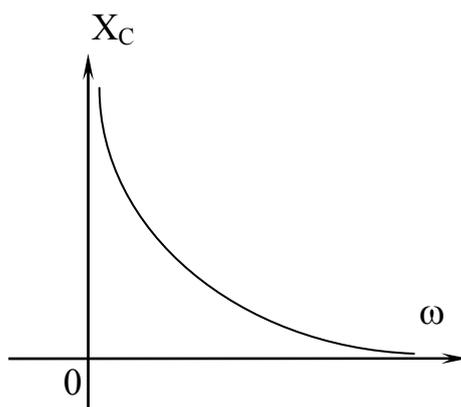


Рис. 3.10

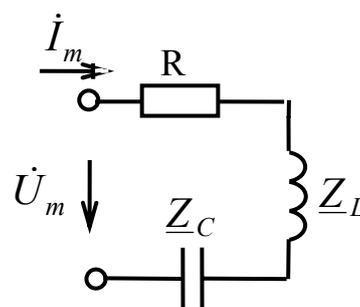


Рис. 3.11

Сопротивление R , в котором протекает гармонический ток $i(t)$, на комплексной схеме остается тем же сопротивлением R , но в котором течет комплексный ток \dot{I}_m ; индуктивность L заменяется комплексным сопротивлением индуктивности \underline{Z}_L ; емкость C - комплексным сопротивлением емкости \underline{Z}_C ; гармоническое напряжение или ЭДС на входе $u(t)$ или $e(t)$ - соответственно

комплексными амплитудами \dot{U}_m или \dot{E}_m , и по аналогии, гармоническая ТДС $j(t)$ - комплексной амплитудой ТДС \dot{J}_m (рис. 3.12).

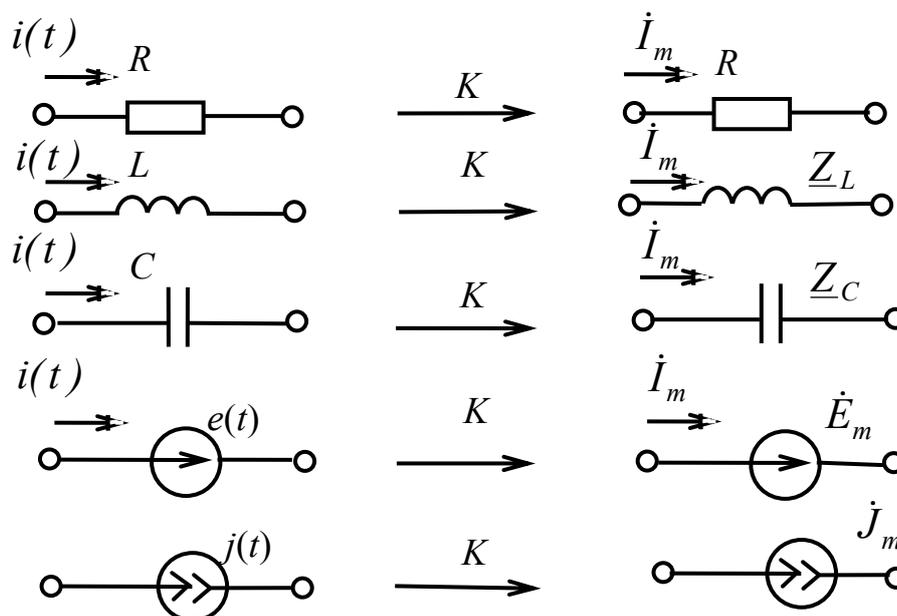


Рис. 3.12. Обозначение элементов электрической цепи на комплексной схеме замещения

С учетом введенных обозначений уравнение (3.2) можно записать в виде:

$$[R + j(X_L - X_C)]\dot{I}_m = \dot{U}_m. \quad (3.3)$$

Величину $X = X_L - X_C$ называют реактивным сопротивлением электрической цепи. Реактивное сопротивление может быть как положительной, так и отрицательной величиной. График зависимости реактивного сопротивления от угловой частоты приведен на рис. 3.13.

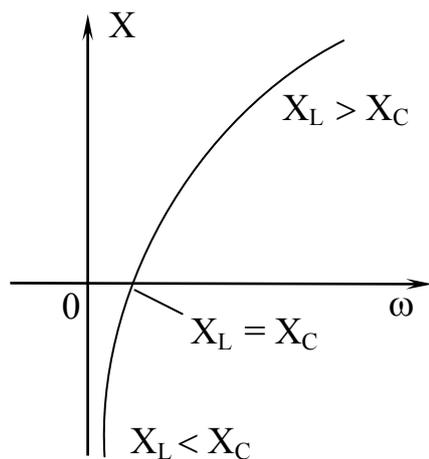


Рис. 3.13

В противоположность реактивному сопротивлению X величину R называют активным сопротивлением.

Величину $\underline{Z} = R + jX = Ze^{j\varphi}$ называют комплексным сопротивлением электрической цепи, где $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$ - полное сопротивление цепи, а $\varphi = \arctg \frac{X}{R}$ - угол сдвига фаз

между напряжением и током в цепи.

На основании формулы (3.4) можно построить прямоугольный треугольник (рис. 3.14), который носит название треугольника сопротивлений.

На основании формулы (3.4) можно построить прямоугольный треугольник (рис. 3.14), который носит название треугольника сопротивлений.

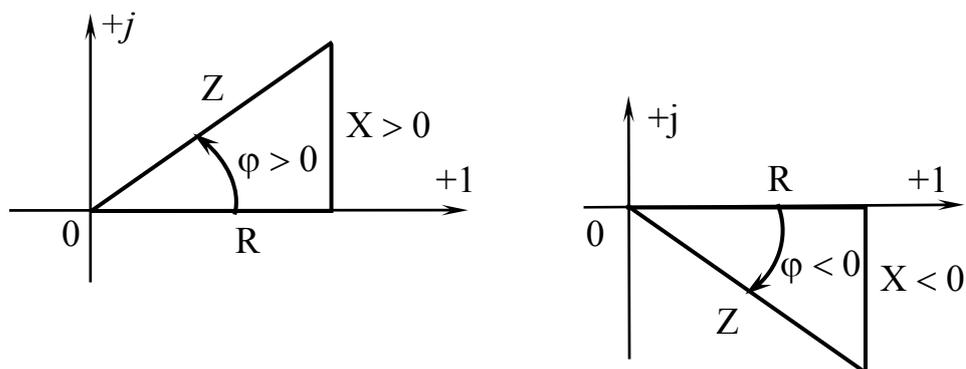


Рис. 3.14

С введением комплексного сопротивления цепи уравнение (3.3) приобретает вид

$$\underline{Z} \dot{I}_m = \dot{U}_m \quad \text{или} \quad \dot{I}_m = \frac{\dot{U}_m}{\underline{Z}}. \quad (3.5)$$

Уравнение (3.5) выражает закон Ома в комплексной форме, записанный для комплексных амплитуд тока и напряжения.

Величина в $\sqrt{2}$ раз меньшая комплексной амплитуды $\dot{A} = \dot{A}_m / \sqrt{2}$ называется **комплексным действующим значением**.

Для комплексных действующих значений закон Ома приобретает вид:

$$\dot{U} = \underline{Z} \dot{I} \quad \text{или} \quad \dot{I} = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}}.$$

Чтобы понять значение термина угол сдвига фаз между напряжением и током в электрической цепи, запишем закон Ома в виде

$$\dot{I} = \frac{U e^{j\psi_u}}{Z e^{j\varphi}} = \frac{U}{Z} e^{j(\psi_u - \varphi)} = I e^{j\psi_i},$$

где $\psi_i = \psi_u - \varphi$, или $\varphi = \psi_u - \psi_i$.

На векторных диаграммах угол φ отсчитывается от тока к напряжению. Угол φ имеет отрицательное значение, если он отсчитывается по часовой стрелке, и положительное – если против.

3.3.4. Законы Кирхгофа в комплексной форме.

Для мгновенных значений токов первый закон Кирхгофа имеет вид

$$\sum_k i_k(t) = 0. \quad (3.6)$$

Если в электрической цепи имеет место режим гармонического тока, то к уравнению (3.6) можно применить комплексное преобразование.

Имеем

$$\sum_k \dot{I}_{mk} = 0$$

или для комплексных действующих значений токов:

$$\sum_k \dot{I}_k = 0.$$

Второй закон Кирхгофа для мгновенных значений имеет вид

$$\sum_k e_k(t) = \sum_n u_n(t). \quad (3.7)$$

Применив комплексное преобразование к уравнению (3.7), получим второй закон Кирхгофа для комплексных амплитуд:

$$\sum_k \dot{E}_{mk} = \sum_n \dot{U}_{mn} \quad \text{или} \quad \sum_k \dot{E}_{mk} = \sum_n \underline{Z}_n \dot{I}_{mn},$$

а также для комплексных действующих значений

$$\sum_k \dot{E}_k = \sum_n \dot{U}_n \quad \text{или} \quad \sum_k \dot{E}_k = \sum_n \underline{Z}_n \dot{I}_n.$$

3.3.5. Применение метода комплексных амплитуд к расчету электрических цепей гармонического тока.

Поскольку записи уравнений основных законов электрических цепей в комплексной форме по своей структуре совпадают с соответствующими уравнениями для цепей постоянного тока, то все методы расчета электрических цепей постоянного тока распространяются на цепи гармонического тока, но в комплексной форме.

Таким образом, анализ электрических цепей гармонического тока можно осуществлять в комплексной форме, применяя метод эквивалентных преобразований, метод уравнений Кирхгофа, методы контурных токов и узловых напряжений, принципы взаимности и наложения, а также теоремы об активном двухполюснике (Тевенена и Нортона).

Алгоритм расчета электрических цепей гармонического тока.

1. Изображаем комплексную схему замещения электрической цепи и определяем ее параметры (комплексные сопротивления ветвей и комплексные амплитуды источников напряжения и тока).

2. Любыми известными методами расчета определяем комплексные амплитуды (комплексные действующие значения) искомых токов и напряжений.

3. От комплексных амплитуд найденных токов и напряжений переходим к мгновенным значениям.

Первый и третий пункты алгоритма очень просты и, как правило, не вызывают никаких трудностей. Поэтому очень часто в условиях задач задаются параметрами комплексной схемы замещения цепи, и ставится задача расчета комплексных токов и напряжений.

Пример. В электрической цепи, схема которой изображена на рис. 3.5, заданы такие параметры:

$$u(t) = 20\sin(314t - 30^\circ) \text{ В}, \quad R = 30 \text{ Ом}, \quad L = 63,7 \text{ мГн}, \quad C = 53 \text{ мкФ}.$$

Требуется определить ток, напряжения на элементах и построить векторную диаграмму.

1. Изображаем комплексную схему замещения цепи (рис. 3.11) и определяем комплексные сопротивления и комплексную амплитуду напряжения на входе цепи.

$$\underline{Z}_L = j\omega L = j314 \cdot 63,7 \cdot 10^{-3} = j20 \text{ Ом.}$$

$$\underline{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} = -j \frac{1}{314 \cdot 53 \cdot 10^{-6}} = -j60 \text{ Ом.}$$

$$\dot{U}_m = 20e^{-j30^\circ} \text{ В.}$$

2. По комплексной схеме вычисляем комплексные амплитуды искомых величин:

$$\dot{I}_m = \frac{\dot{U}_m}{R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C} = \frac{20e^{-j30^\circ}}{30 + j20 - j60} = 0,4e^{j23^\circ} \text{ А,}$$

$$\dot{U}_{mR} = R\dot{I}_m = 30 \cdot 0,4e^{j23^\circ} = 12e^{j23^\circ} \text{ В,}$$

$$\dot{U}_{mL} = \underline{Z}_L \cdot \dot{I}_m = j20 \cdot 0,4e^{j23^\circ} = 8e^{j113^\circ} \text{ В,}$$

$$\dot{U}_{mC} = \underline{Z}_C \dot{I}_m = -j60 \cdot 0,4e^{j23^\circ} = 60e^{-j90^\circ} \cdot 0,4e^{j23^\circ} = 24e^{-j67^\circ} \text{ В.}$$

Для построения векторной диаграммы тока и напряжений выбираем масштабы

$$m_I = 0,1 \text{ А/см, } m_U = 8 \text{ В/см}$$

и записываем законы Кирхгофа (в данном случае - только второй закон).

$$\dot{U}_{mR} + \dot{U}_{mL} + \dot{U}_{mC} = \dot{U}_m \quad (3.8)$$

На рис. 3.15 изображена векторная диаграмма, которая отображает в комплексной плоскости уравнение (3.8)

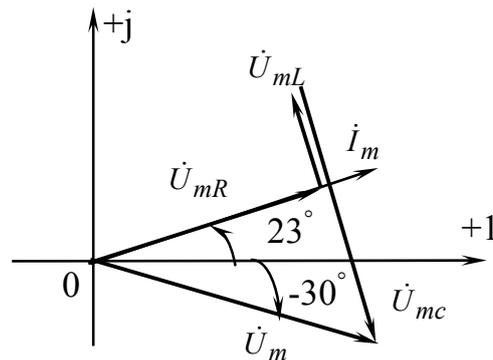


Рис. 3.15

3. От комплексных значений тока и напряжений переходим к мгновенным значениям:

$$i(t) = 0,4 \sin(314t + 23^\circ) \text{ А,}$$

$$u_R(t) = 12 \sin(314t + 23^\circ) \text{ В,}$$

$$u_L(t) = 8 \sin(314t + 113^\circ) \text{ В,}$$

$$u_C(t) = 24 \sin(314t - 67^\circ) \text{ В.}$$

Лекция 7

План лекции:

3.4. Мощность в цепях гармонического тока

3.5. Баланс мощностей в цепи гармонического тока. Физический смысл реактивной мощности.

3.4. Мощность в цепях гармонического тока.

Запишем выражение мгновенной мощности при гармоническом режиме

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = U_m \sin(\omega t + \psi) \cdot I_m \sin(\omega t + \psi - \varphi).$$

Здесь учтем, что $\psi_i = \psi_u - \varphi$. Проведем преобразование, используя формулу $\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) - \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta)$:

$$p(t) = \frac{1}{2} U_m I_m [\cos \varphi - \cos(2\omega t + 2\psi - \varphi)] = UI \cos \varphi - UI \cos(2\omega t + 2\psi - \varphi).$$

Первое слагаемое (постоянная величина) определяет необратимый процесс поглощения электромагнитной энергии электрической цепью. Мощность, которая соответствует этому необратимому процессу, равняется средней мощности за период и носит название **активной мощности**.

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = UI \cos \varphi.$$

Единица активной мощности - ватт (Вт).

Множитель $\cos \varphi$ называют **коэффициентом мощности**. Он определяется соотношением между активным и реактивным сопротивлением цепи. Чем меньший угол сдвига фаз φ между током и напряжением, тем больше активная мощность P .

Второе слагаемое определяет колебание энергии между источником и электрической цепью. Среднее значение этого слагаемому за период равно нулю.

Амплитуда переменной составляющей мгновенной мощности, которая равняется произведению действующих значений тока и напряжения в цепи, носит название **полной мощности**

$$S = UI.$$

Единицей измерения полной мощности является вольт-ампер (ВА). Величина $Q = \pm \sqrt{S^2 - P^2} = UI \sin \varphi$ носит название **реактивной мощности**.

Единицей измерения реактивной мощности является ВАР (вольт-ампер реактивный). С физической точки зрения все три мощности: активная P , реактивная Q и полная S имеют одинаковую единицу измерения – ватт. Однако исторически так сложилось, что на определенном этапе развития электротехники для каждой из мощностей удобно было ввести свои единицы измерения: ватт,

вольт-ампер реактивный и вольт-ампер. Учитывая удобство использования, эти единицы измерения мощностей используются и сейчас.

Согласно введенным выражениям для мощностей можно построить так называемый треугольник мощностей (рис. 3.16), из которого вытекают соотношения между P , Q , S и φ .

Введем понятие активной и реактивной составляющих тока и напряжения.

Составляющая напряжения, которая совпадает по фазе с током, носит название активной составляющей и обозначается U_a .

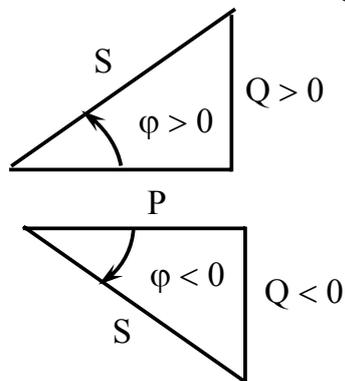


Рис. 3.16. Треугольник мощностей

Составляющая напряжения, которая имеет сдвиг по фазе на угол $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ относительно тока, носит название реактивной составляющей и обозначается U_p .

Разложение напряжения на активную и реактивную составляющие представлено на рис. 3.17.

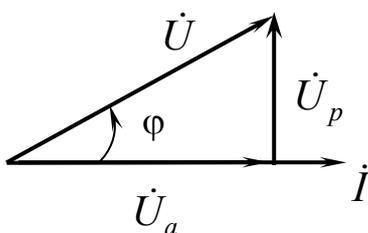


Рис. 3.17

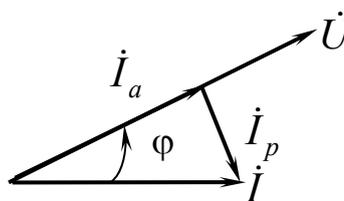


Рис. 3.18

Из рис. 3.17 вытекает, что

$$U_a = U \cos \varphi = ZI \cos \varphi = RI, \quad U_p = U \sin \varphi = ZI \sin \varphi = XI.$$

Аналогично ток можно разложить на активную и реактивную составляющие (рис. 3.18):

$$I_a = I \cos \varphi, \quad I_p = I \sin \varphi.$$

Запишем выражения для мощностей с использованием введенных величин:

$$P = UI \cos \varphi = U_a I = UI_a = Z \cos \varphi I^2 = RI^2,$$

$$Q = UI \sin \varphi = U_p I = UI_p = Z \sin \varphi I^2 = XI^2,$$

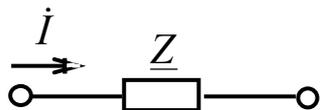
$$S = UI = ZI^2.$$

Величину $\tilde{S} = P + jQ = \sqrt{P^2 + Q^2} e^{j \arctg \frac{Q}{P}} = S e^{j\varphi}$ называют комплексной мощностью. Можно показать, что комплексная мощность может быть вычислена как произведение комплексного напряжения на комплексно сопряженный ток, т.е.

$$\tilde{S} = \dot{U} \dot{I}^* = U e^{j\psi_u} \cdot I e^{-j(\psi_u - \varphi)} = UI e^{j\varphi} = UI \cos \varphi + jUI \sin \varphi = P + jQ.$$

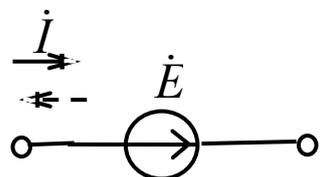
Определим комплексную мощность для отдельных элементов комплексной схемы замещения цепи.

Комплексное сопротивление \underline{Z} :



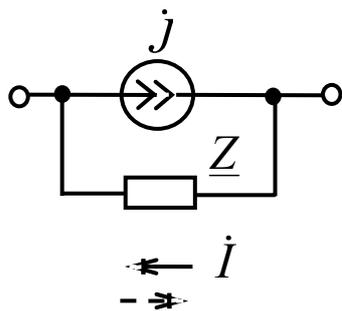
$$\tilde{S}_z = \dot{U} \cdot \dot{I}^* = \underline{Z} \dot{I} \dot{I}^* = \underline{Z} I^2.$$

Комплексная электродвижущая сила:



$$\tilde{S}_E = \pm \dot{E} \dot{I}^*.$$

Комплексная токодвижущая сила:



$$\tilde{S}_J = \pm \dot{U}_J \dot{J}^* = \pm \underline{Z} \dot{I} \dot{J}^*.$$

Итак, на основании вышеизложенного можно записать баланс комплексных мощностей для электрической цепи гармонического тока в виде

$$\sum \dot{E} \dot{I}^* + \sum \underline{Z} \dot{I} \dot{J}^* = \sum \underline{Z} I^2.$$

Таким образом, сумма комплексных мощностей идеализированных активных элементов цепи (источников энергии) равна сумме комплексных мощностей всех идеализированных пассивных элементов.

Из условия баланса комплексных мощностей вытекают условия баланса активных и реактивных мощностей:

$$\sum P_{\text{ист.}} = \sum R I^2, \quad \sum Q_{\text{ист.}} = \sum X I^2.$$

Уравнение баланса комплексных мощностей используется для проверки расчетов электрических цепей гармонического тока.

3.5. Баланс мощностей в цепи гармонического тока. Физический смысл реактивной мощности.

Рассмотрим цепь с последовательным соединением сопротивления, индуктивности и емкости, которая питается от источника гармонического напряжения (рис. 3.19).

Предположим, что начальная фаза напряжения $\psi = 0$ и $X_C > X_L$, т.е.

$$U_C > U_L.$$

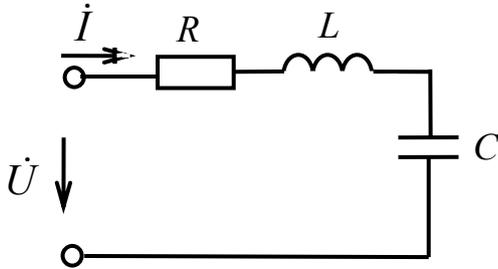


Рис. 3.19

Выражение для мгновенной мощности электромагнитной энергии цепи имеет вид:

$$p(t) = UI \cos \varphi - UI \cos(2\omega t - \varphi). \quad (3.9)$$

Рассмотрим мгновенную мощность отдельно в элементах R , L и C , учитывая, что в каждом из них течет одинаковый ток \dot{I} .

Относительно элемента R ($\varphi_R = 0$)

формула (3.9) приобретает вид

$$p_R(t) = U_R I - U_R I \cos 2\omega t.$$

Относительно элемента L ($\varphi_L = \frac{\pi}{2}$):

$$p_L(t) = U_L I \cos \frac{\pi}{2} - U_L I \cos(2\omega t - \frac{\pi}{2}) = -U_L I \sin 2\omega t.$$

Относительно элемента C ($\varphi_C = -\frac{\pi}{2}$):

$$p_C(t) = U_C I \cos(-\frac{\pi}{2}) - U_C I \cos(2\omega t + \frac{\pi}{2}) = U_C I \sin 2\omega t.$$

Тогда для мгновенной мощности цепи можно записать

$$p(t) = p_R(t) + p_L(t) + p_C(t) = U_R I - U_R I \cos 2\omega t - U_L I \sin 2\omega t + U_C I \sin 2\omega t.$$

Графики мгновенной мощности в сопротивлении, емкости и индуктивности представлены на рис. 3.20.

Рассмотрим временные диаграммы мгновенной мощности в каждом элементе.

Мгновенная мощность в сопротивлении для любого момента времени - положительна, т.е. сопротивление всегда, хотя с переменной скоростью, потребляет электромагнитную энергию от источника и превращает ее необратимо в другие виды энергии.

Емкость и индуктивность за одну часть периода накапливают энергию, а за другую - отдают накопленную энергию. При этом, если емкость накапливает энергию ($P > 0$), то индуктивность в это же время отдает накопленную энергию ($P < 0$).

Если цепь состоит только из емкости и индуктивности, то энергия, которая передается от источника напряжения к электрической цепи, временно накапливается или в магнитном поле индуктивности, или в электрическом поле емкости, а потом возвращает обратно к источнику.

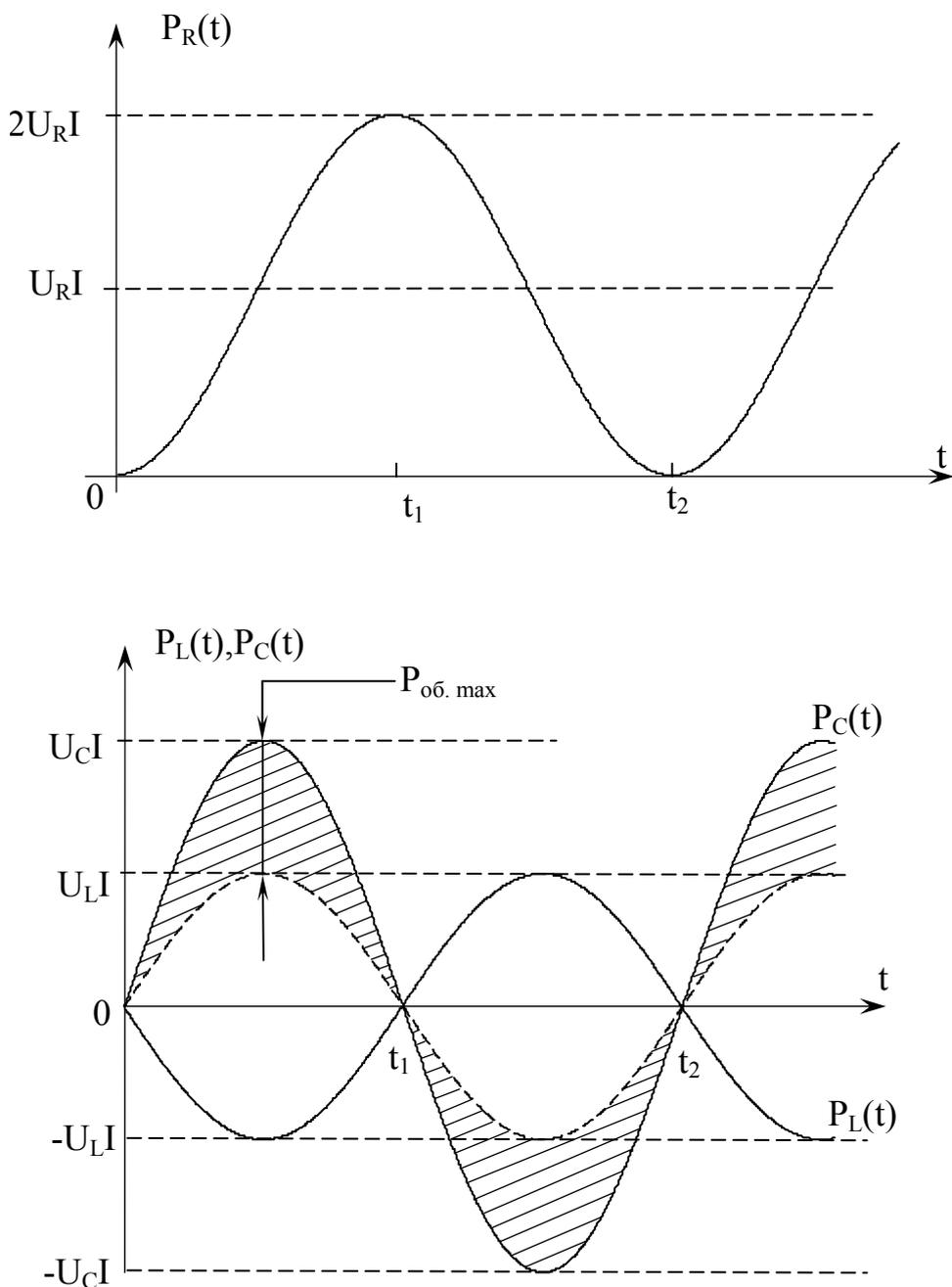


Рис. 3.20.

Поскольку в нашем случае $U_C > U_L$, то емкость в промежутке времени от 0 до t_1 (первая половина периода) накапливает энергии больше, чем за это же время отдает индуктивность, т.е. цепь отбирает энергию от источника и накапливает ее в электрическом поле емкости. В следующий полупериод ($t_1 < t < t_2$) емкость отдает энергии больше, чем за это же время накапливает индуктивность, т.е. цепь возвращает излишек энергии в источник.

На рис. 3.20 заштрихованный участок определяет ту энергию, которой цепь обменивается с источником напряжения каждые полпериода. Мощность, которая соответствует энергии обмена между источником и электрической цепью, носит название обменной мощности.

Определим максимальное значение обменной мощности $P_{об.м}$.

Максимальная мощность в индуктивности

$$P_{Lm} = U_L I = X_L I^2 = \omega L I^2 = \omega \frac{L I_m^2}{2} = \omega W_{маг.м},$$

в емкости

$$P_{Cm} = U_C I = \frac{U_C^2}{X_C} = \omega C U_C^2 = \omega \frac{C U_{mC}^2}{2} = \omega W_{эл.м},$$

где $W_{маг.м}$ и $W_{эл.м}$ - максимальные значения энергии, которая накапливается соответственно в магнитном поле индуктивности и электрическом поле емкости.

Тогда

$$P_{об.м} = P_{Lm} - P_{Cm} = \omega(W_{маг.м} - W_{эл.м}).$$

С другой стороны

$$P_{об.м} = U_L I - U_C I = (U_L - U_C) I = (X_L - X_C) I^2 = X I^2 = Q,$$

т.е.

$$P_{об.м} = \omega(W_{маг.м} - W_{эл.м}) = Q,$$

где Q - реактивная мощность цепи.

Отсюда легко понять физический смысл реактивной мощности - это максимальное значение мощности, которой цепь каждые полпериода обменивается с источником напряжения.

РАЗДЕЛ 4

РЕЗОНАНСНЫЕ ЯВЛЕНИЯ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

Лекция 8

План лекции:

- 4.1. Резонанс в последовательном контуре (резонанс напряжений).
- 4.2. Частотные и резонансные характеристики последовательного контура.
- 4.3. Комплексная проводимость цепи. Эквивалентные преобразования последовательного и параллельного соединения элементов. Треугольник проводимостей.

4.1. Резонанс в последовательном контуре (резонанс напряжений).

Явление резонанса, с которым впервые знакомятся в курсе физики, предполагает взаимодействие колебательной системы, движение которой описывается синусоидальной функцией времени, и внешнего периодического воздействия, которое действует в «такт» с движением колебательной системы. При этом в колебательной системе происходит периодический обмен кинетической и потенциальной энергий.

При приближении частоты внешнего периодического воздействия к собственной частоте колебаний механической системы наблюдается явление резкого увеличения амплитуды колебаний системы, которое и называют в механике резонансом.

В электротехнике в качестве колебательной системы выступает электрическая цепь с разными по характеру накопительными элементами (емкостью и индуктивностью), в которой возможен периодический обмен между энергиями электрического и магнитного поля, а в качестве внешнего воздействия - синусоидальное напряжение или ток на входе цепи.

При плавном изменении частоты входного напряжения в последовательном контуре с малыми потерями наблюдается резкий рост амплитуд тока на входе цепи и напряжений на емкости и индуктивности, причем максимальные значения этих величин имеют место при разных частотах. Что же в этом случае принять за резонансную частоту, если критерий амплитудного резонанса оказался не однозначным? Для решения проблемы определения явления резонанса по отношению к электрическим цепям было принято следующее компромиссное решение:

резонансом называют такой режим работы электрической цепи, содержащей емкости и индуктивности, при котором разность фаз напряжения и тока на входе цепи равна нулю.

$$\text{Т.е. } \varphi = \psi_u - \psi_i = 0.$$

Такой резонанс условно называют **фазовым резонансом**, а частоту внешнего воздействия, которая отвечает такому режиму, - **резонансной частотой**.

Рассмотрим последовательный контур, т.е. цепь, состоящую из последовательного соединения элементов R, L и C (рис. 4.1).

Комплексное сопротивление последовательного контура

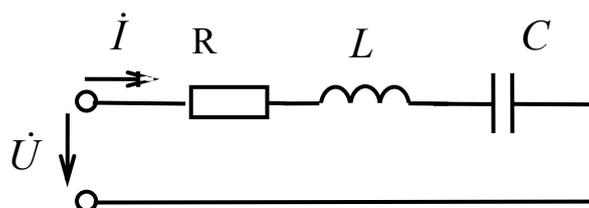


Рис. 4.1

$$\underline{Z} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j(X_L - X_C) = R + jX = Ze^{j\varphi},$$

где $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$; $\varphi = \arctg \frac{X}{R}$.

Из определения резонанса $\varphi = 0$ для последовательного контура можно записать **условие резонанса**:

$X = 0$ или $X_L = X_C$, при этом входное сопротивление является чисто активным $\underline{Z} = R$.

Условие резонанса позволяет определить резонансную частоту последовательного контура ω_0 .

$$\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0, \quad \text{откуда} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Отметим, что резонансная частота последовательного контура равна частоте собственных незатухающих колебаний контура, составленного из емкости и индуктивности.

$$\omega_{\text{соб.}} = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

На предыдущей лекции было установлено, что максимальное значение обменной мощности между источником энергии и последовательной R, L, C - цепью определяется выражением

$$P_{\text{обм.м}} = XI^2 = \omega(W_{\text{маг.м}} - W_{\text{эл.м}}).$$

При резонансе

$$X = 0, \quad P_{\text{обм.м}} = 0, \quad W_{\text{маг.м}} = W_{\text{эл.м}}, \quad \text{т.е.} \quad \frac{LI_m^2}{2} = \frac{CU_m^2}{2}.$$

Выводы. При резонансе обмен энергией между магнитным полем индуктивности и электрическим полем емкости сбалансирован. Между цепью и источником обмена энергией не происходит.

Источник энергии передает в цепь только активную мощность P, которая потребляется сопротивлением R.

Введем в рассмотрение так называемые вторичные параметры контура.

Сопротивление емкости или индуктивности при резонансе называется **характеристическим (волновым) сопротивлением** контура и обозначается буквой ρ .

$$\rho = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Добротностью контура Q называется отношение характеристического сопротивления контура к активному сопротивлению

$$Q = \frac{\rho}{R} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 CR} = \frac{\sqrt{L}}{R}.$$

Для понимания физического смысла добротности контура Q определим напряжения на емкости и индуктивности при резонансе.

$\dot{U}_L = jX_L \dot{I}$; $\dot{U}_C = -jX_C \dot{I}$, а с учетом того, что при резонансе $X_L = X_C = \rho$, то $\dot{U}_L = -\dot{U}_C$, т.е. напряжения на емкости и индуктивности равны по модулю, направлены противоположно и таким образом компенсируют друг друга. Поэтому резонанс в последовательном контуре называют **резонансом напряжений**.

Построим векторную диаграмму для случая резонанса (рис. 4.2).

Направим ток \dot{I} по действительной оси. Тогда напряжение на индуктивности \dot{U}_L будет опережать ток по фазе на 90° , а напряжение на емкости \dot{U}_C - отставать на 90° , т.е. напряжения будут направлены противоположно друг другу. Входное напряжение

$$\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C = \dot{U}_R.$$

Действующие напряжения на индуктивности и емкости

$$U_L = U_C = \rho I = \rho \frac{U}{R} = QU.$$

Таким образом, добротность Q показывает, во сколько раз напряжение на емкости или индуктивности при резонансе больше чем напряжение на входе цепи.

Например, при входном напряжении $U = 10 \text{ В}$ и добротности $Q = 100$, напряжение на емкости и индуктивности при резонансе будет достигать $U_{Cp} = U_{Lp} = 1000 \text{ В}$.

В радиотехнике используются контура с высокой добротностью, приблизительно от 10^2 до 10^5 . Это достигается благодаря уменьшению активного сопротивления R и увеличению характеристического сопротивления ρ . Если в последовательном контуре взять $R = 0$, то такой контур называется идеальным. Входное сопротивление идеального последовательного контура при резонансе равно нулю.

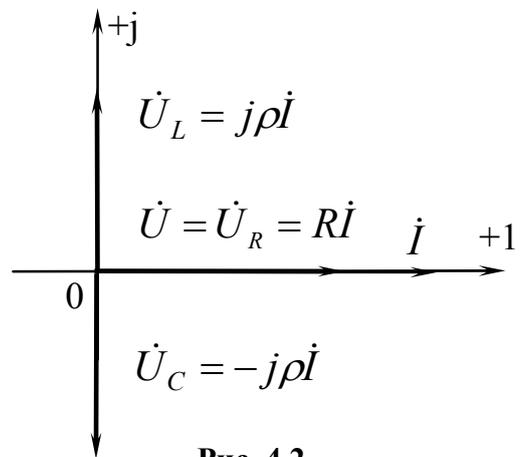


Рис. 4.2

4.2. Частотные и резонансные характеристики последовательного контура.

Зависимости модуля и аргумента комплексного сопротивления (проводимости) электрической цепи от частоты будем называть **частотными характеристиками**.

Получим частотные характеристики последовательного контура.

$$\underline{Z} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}, \quad |\underline{Z}| = Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

Построим частотные характеристики последовательного контура (рис. 4.3).

Если $\omega < \omega_0$; $X < 0$; $\varphi < 0$ - реактивное сопротивление цепи носит емкостной характер.

Если $\omega = \omega_0$; $X = 0$; $\varphi = 0$ - сопротивление последовательного контура чисто активное.

Если $\omega > \omega_0$; $X > 0$; $\varphi > 0$ - реактивное сопротивление цепи носит индуктивный характер.

Таким образом, в момент резонанса происходит изменение характера реактивного сопротивления цепи.

Зависимости действующих значений (амплитуд) токов и напряжений от частоты будем называть **резонансными кривыми**.

Для построения резонансных кривых получим зависимости $I(\omega)$, $U_R(\omega)$, $U_L(\omega)$, $U_C(\omega)$.

Определим ток и напряжения на элементах в последовательном контуре.

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})}.$$

Для того чтобы перейти от комплексных действующих значений к самим действующим значениям, которые показывают измерительные приборы, необходимо взять модуль от левой и правой части уравнения. Тогда имеем:

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}; \quad U_R = RI; \quad U_C = \frac{1}{\omega C}I; \quad U_L = \omega LI.$$

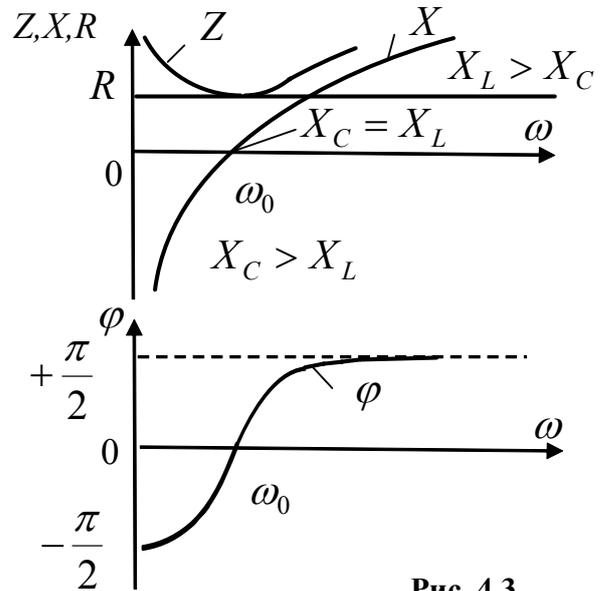


Рис. 4.3

Зависимость $I(\omega)$ строим, учитывая, что при $\omega = 0$ и $\omega \rightarrow \infty$, $I = 0$, а при $\omega = \omega_0$, $I_0 = \frac{U}{R}$.

При построении зависимости $U_C(\omega)$, учитываем, что при постоянном токе емкость представляет собой разрыв цепи, поэтому при $\omega = 0$ напряжение на емкости равно входному напряжению.

Определим, где находится максимум напряжения на емкости по частоте. Для этого продифференцируем $U_C(\omega)$ и производную приравняем к нулю

$$\frac{dU_C(\omega)}{d\omega} = -\frac{1}{\omega^2 C} I(\omega) + \frac{1}{\omega C} \cdot \frac{dI(\omega)}{d\omega} = 0.$$

Величины I , ω , C являются положительными. Чтобы сумма равнялась нулю, производная от тока должна быть положительной $\frac{dI(\omega)}{d\omega} > 0$, т.е. кривая $I(\omega)$ на этом участке должна возрастать. Поэтому максимум $U_C(\omega)$ будет находиться левее от частоты ω_0 , т.е. $\omega_C < \omega_0$.

Если $\omega \rightarrow \infty$, то $U_C \rightarrow 0$, причем быстрее, чем ток.

При построении зависимости $U_L(\omega)$ учитываем, что при $\omega = 0$, $U_L = 0$, а при $\omega \rightarrow \infty$, $X_L \rightarrow \infty$, что эквивалентно разрыву цепи. Поэтому напряжение на индуктивности будет стремиться к входному напряжению, т.е. $U_L \rightarrow U$.

Определим, где находится максимум напряжения U_L по частоте. Продифференцируем $U_L(\omega)$ и производную приравниваем к нулю

$$\frac{dU_L(\omega)}{d\omega} = LI(\omega) + \omega L \cdot \frac{dI(\omega)}{d\omega} = 0.$$

Это уравнение может выполняться лишь при условии $\frac{dI(\omega)}{d\omega} < 0$, т.е. кривая $I(\omega)$ на этом участке частоты должна спадать. Поэтому максимум $U_L(\omega)$ будет находиться правее от резонансной частоты, т.е. $\omega_L > \omega_0$.

Как было установлено ранее, на резонансной частоте $U_L = U_C$.

Зависимость $U_R(\omega)$ будет повторять зависимость $I(\omega)$ с учетом коэффициента R .

На основании вышеприведенных соображений на рис. 4.4 построены резонансные кривые последовательного контура.

Реальная катушка индуктивности содержит наряду с индуктивностью L активное сопротивление R_k , поэтому при экспериментальном получении резонансных кривых максимальное напряжение на катушке будет выше максимального напряжения на емкости.

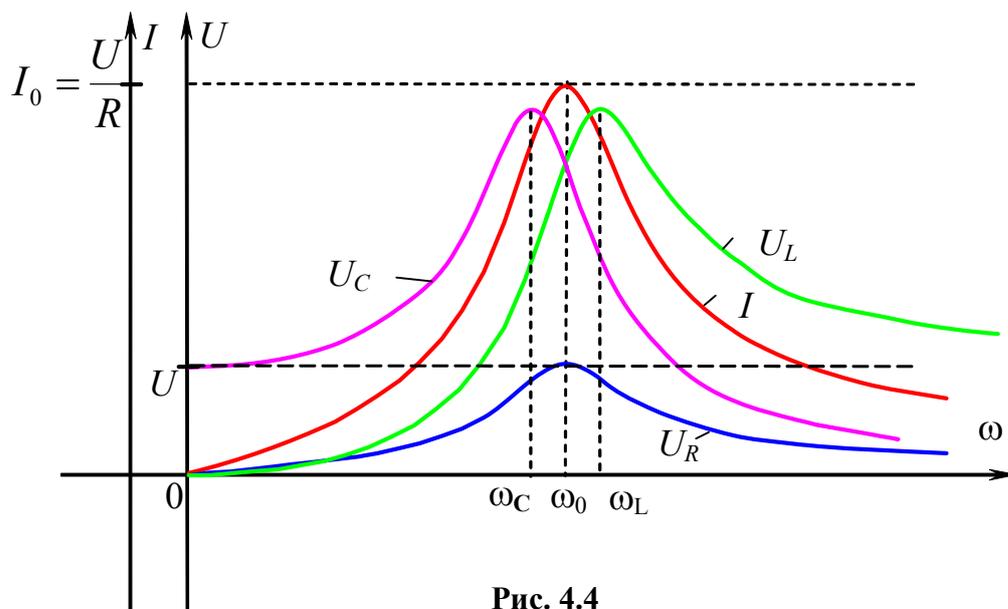


Рис. 4.4

Полосой пропускания цепи $\Delta\omega$ называется интервал частот, в пределах которого ток $I(\omega)$ уменьшается не более чем в $\sqrt{2}$ раз от максимального значения тока I_0 на резонансной частоте (рис. 4.5).

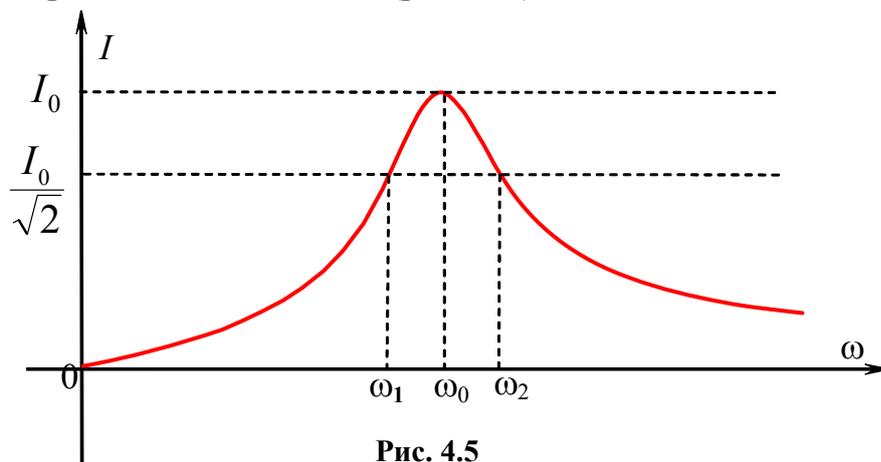


Рис. 4.5

Из рис. 4.5 видно, что полоса пропускания $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$, где ω_1 и ω_2 - граничные частоты полосы пропускания.

Для определения граничных частот полосы пропускания можно воспользоваться выражением

$$\frac{I}{I_0} = \frac{R}{Z} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2(\eta - \frac{1}{\eta})^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

где $\eta = \frac{\omega}{\omega_0}$ - относительная частота, откуда $\eta_2 - \eta_1 = \frac{1}{Q}$, или $\frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_0} = \frac{1}{Q}$.

Таким образом, добротность контура $Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$.

Чем выше добротность контура, тем уже полоса пропускания, т.е. резонансная кривая острее.

Резонанс в последовательном контуре можно получить при постоянной частоте внешнего напряжения путем изменения параметров L или C . При этом можно получить зависимости I, U_L, U_C от переменного параметра, которые не будут совпадать с резонансными кривыми.

Зависимости U_R, U_L, U_C от L или C называют кривыми настройки, чтобы не путать их с резонансными кривыми.

4.3. Комплексная проводимость цепи. Эквивалентные преобразования последовательного и параллельного соединения элементов. Треугольник проводимостей.

Величина, обратная комплексному сопротивлению цепи, называется **комплексной проводимостью** (обозначается \underline{Y}).

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{Ze^{j\varphi}} = Ye^{-j\varphi} = Y \cos \varphi - jY \sin \varphi = G - jB.$$

Действительную часть комплексной проводимости обозначают буквой G и называют **активной проводимостью**.

Мнимую часть обозначают буквой B и называют **реактивной проводимостью**.

Активная проводимость всегда положительна, а реактивная – может быть как положительной, так и отрицательной величиной в зависимости от знака реактивного сопротивления X .

Величина, обратная полному сопротивлению цепи, называется **полной проводимостью**.

$$Y = \frac{1}{Z} = |\underline{Y}| = \sqrt{G^2 + B^2}.$$

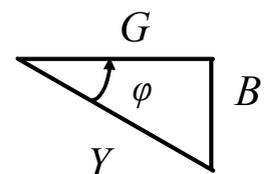


Рис. 4.6

Введенным выше проводимостям отвечает так называемый треугольник проводимостей (рис. 4.6).

Рассмотрим последовательное соединение активного и реактивного сопротивлений (рис. 4.7,а). Пусть реактивное сопротивление имеет индуктивный характер.

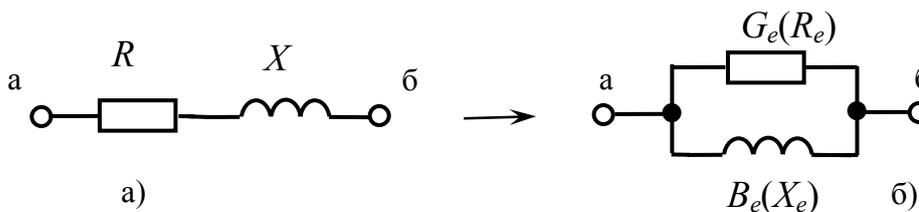


Рис. 4.7

Запишем эквивалентную комплексную проводимость участка цепи

$$\underline{Y}_9 = \frac{1}{R + jX} = \frac{R - jX}{(R + jX)(R - jX)} = \frac{R}{R^2 + X^2} - j \frac{X}{R^2 + X^2} = G_9 - jB_9. \quad (4.1)$$

Согласно выражению (4.1) участок последовательной цепи *аб* может быть представлен в виде параллельного соединения элементов (рис. 4.7,б) с эквивалентными активным и реактивным сопротивлениями. Эквивалентное активное сопротивление при параллельном соединении $R_9 = \frac{1}{G_9}$, а эквивалентное реактивное сопротивление - $X_9 = \frac{1}{B_9}$.

Таким образом, какое-либо последовательное соединение активного и реактивного элементов можно заменить эквивалентным параллельным. Естественно справедлива и обратная замена (рис. 4.8)

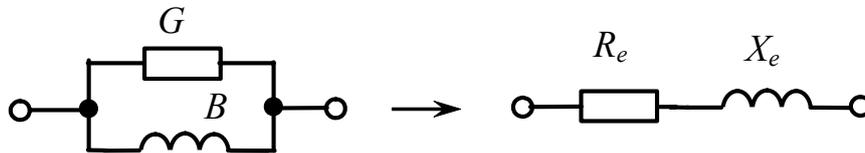


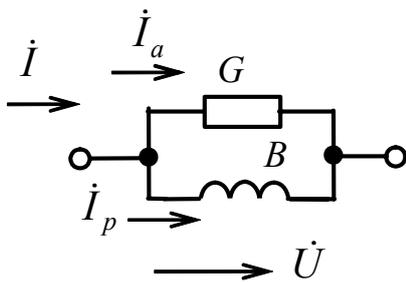
Рис. 4.8

$$\underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}} = \frac{1}{G - jB} = \frac{G + jB}{G^2 + B^2} = \frac{G}{G^2 + B^2} + j \frac{B}{G^2 + B^2} = R_9 + jX_9.$$

Следует отметить, что параметры эквивалентных активных и реактивных сопротивлений (проводимостей) зависят от частоты ω , поэтому такая замена справедлива лишь на фиксированной частоте.

Введем понятие активной и реактивной составляющей тока.

Для этого рассмотрим параллельную цепь (рис. 4.9), к которой приложено напряжение \dot{U} . По закону Ома



$$\dot{I} = \dot{U}\underline{Y} = \dot{U}(G - jB) = \dot{U}G - j\dot{U}B = \dot{I}_a + \dot{I}_p.$$

Составляющая тока $\dot{U}G$, которая совпадает по фазе с приложенным напряжением, называется активной составляющей тока и обозначается \dot{I}_a .

Составляющая тока $-j\dot{U}B$, которая отстает от напряжения на угол 90° , называется реактивной

Рис. 4.9

составляющей и обозначается \dot{I}_p .

Таким образом, через активную проводимость будет протекать активный ток, а через реактивную - реактивный ток.

Если \dot{U} направить по действительной оси, то векторная диаграмма токов будет иметь вид, как показано на рис. 4.10.

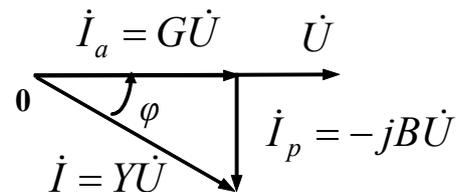


Рис. 4.10

В качестве примера построим векторную диаграмму токов для параллельного соединения элементов R , L , C (рис. 4.11).

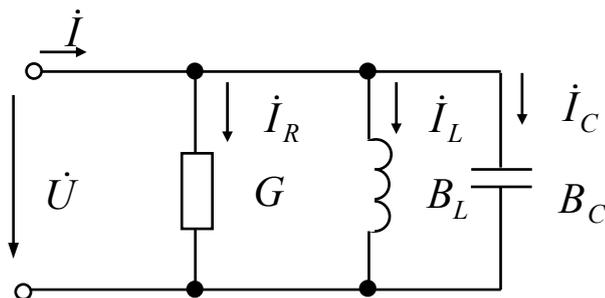


Рис. 4.11

Для этого сначала определим ток на входе цепи.

$$\begin{aligned} \dot{I} &= \dot{U} \underline{Y} = \dot{U} (G - jB) = \dot{U} G - j\dot{U} B = \dot{U} G - j\dot{U} (B_L - B_C) = \\ &= \dot{U} G - j\dot{U} B_L + j\dot{U} B_C = \dot{I}_R + \dot{I}_L + \dot{I}_C. \end{aligned}$$

Направим вектор напряжения \dot{U} по действительной оси, т.е. $\dot{U} = U$.

Если $B_L < B_C$, тогда $I_L < I_C$ и $B = B_L - B_C < 0$, $\varphi < 0$. Векторная диаграмма для этого случая представлена на рис. 4.12,а.

Если $B_L > B_C$, тогда $B > 0$, $\varphi > 0$. Векторная диаграмма представлена на рис. 4.12,б.

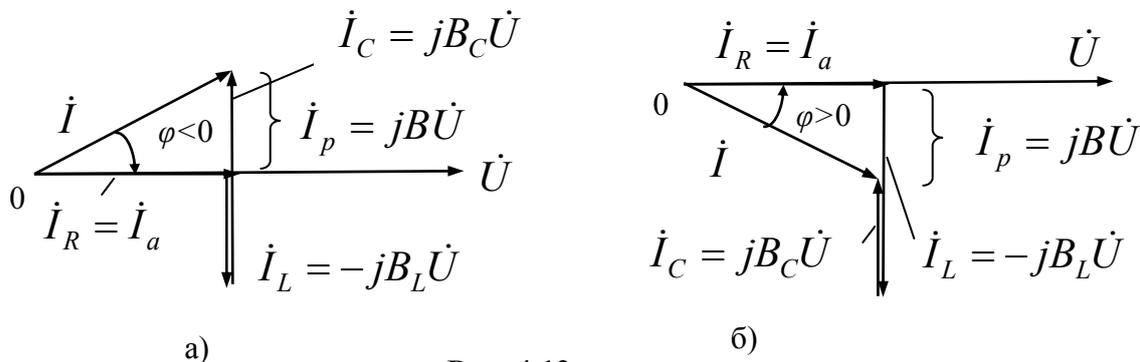


Рис. 4.12

Лекция 9

План лекции:

- 4.4. Резонанс в параллельном контуре (резонанс токов).
- 4.5. Частотные и резонансные характеристики параллельного контура.
- 4.6. Условие передачи максимальной мощности от источника к нагрузке.

4.4. Резонанс в параллельном контуре (резонанс токов).

Цепь, которая состоит из параллельных ветвей с разными по характеру накопительными элементами, называется параллельным контуром.

Из определения следует, что возможно 4 варианта параллельного контура (рис. 4.13).

Контур первого вида называется простым контуром, так как в других трех контурах вместе с резонансом в параллельном контуре возможен резонанс в последовательном одном или в двух контурах.

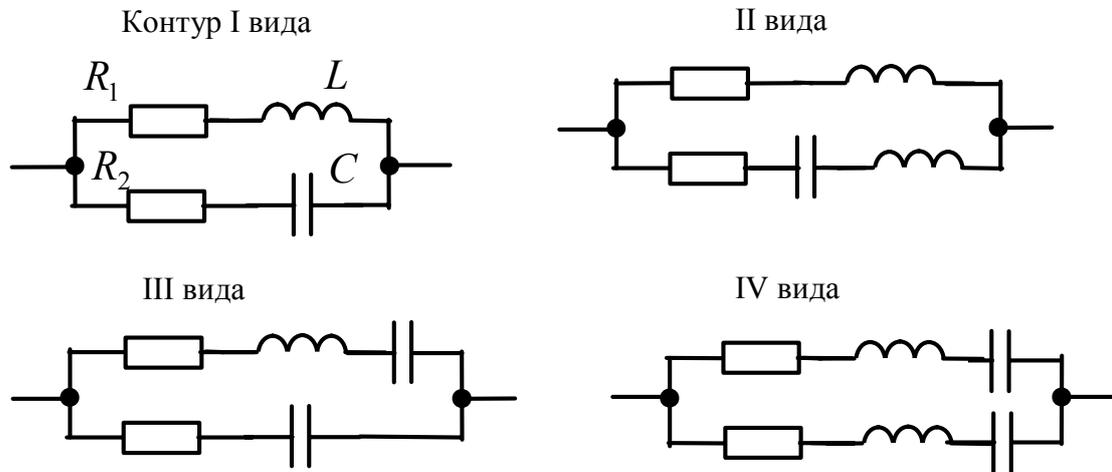


Рис. 4.13

Вспомним определение резонанса. Под резонансом понимают такой режим работы электрической цепи, которая содержит емкости и индуктивности, при котором сдвиг фаз между током и напряжением на входе цепи равен нулю.

Комплексную проводимость параллельных ветвей можно записать в виде

$$\underline{Y} = G - jB = Ye^{-j\varphi},$$

где G - активная проводимость, B - реактивная проводимость, $\varphi = \arctg \frac{B}{G}$ - угол сдвига фаз между током и напряжением.

Из определения резонанса ($\varphi = 0$) вытекает условие резонанса: $B = 0$.

Комплексная схема замещения параллельного контура приведена на рис. 4.14, где $\underline{Z}_1 = R_1 + jX_1$, $\underline{Z}_2 = R_2 + jX_2$.

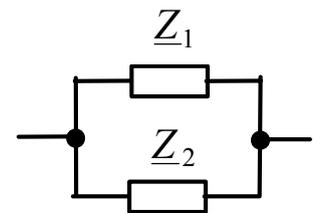


Рис. 4.14

Определим комплексную проводимость параллельного контура.

$$\begin{aligned} \underline{Y} &= \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} = \frac{1}{R_1 + jX_1} + \frac{1}{R_2 + jX_2} = \frac{R_1 - jX_1}{R_1^2 + X_1^2} - \frac{R_2 - jX_2}{R_2^2 + X_2^2} = \\ &= \frac{R_1}{R_1^2 + X_1^2} + \frac{R_2}{R_2^2 + X_2^2} - j\left(\frac{X_1}{R_1^2 + X_1^2} + \frac{X_2}{R_2^2 + X_2^2}\right) = \\ &= (G_1 + G_2) - j(B_1 + B_2) = G - jB. \end{aligned}$$

Условие резонанса для параллельного контура любого вида

$$B = \frac{X_1}{R_1^2 + X_1^2} + \frac{X_2}{R_2^2 + X_2^2} = 0.$$

Из условия резонанса можно определить резонансную частоту.

Определим ее для простого параллельного контура, т.е. для контура I вида. В этом контуре (см. рис. 4.13)

$$X_1 = \omega L; \quad X_2 = -\frac{1}{\omega C} \quad (X_2 = X_{L2} - X_{C2} = 0 - \frac{1}{\omega C}).$$

Подставим в условие резонанса вместо X_1 и X_2 их значения и решим полученное уравнение относительно частоты ω .

$$\frac{\omega L}{R_1^2 + \omega^2 L^2} - \frac{\frac{1}{\omega C}}{R_2^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}} = 0.$$

Приводим выражение к общему знаменателю и числитель приравняем нулю

$$\omega L R_2^2 + \frac{L}{\omega C^2} - \frac{R_1^2}{\omega C} - \frac{L^2 \omega}{C} = 0.$$

После преобразования получим

$$\omega L \left(R_2^2 - \frac{L}{C} \right) = \frac{1}{\omega C} \left(R_1^2 - \frac{L}{C} \right) \quad \text{или} \quad \omega^2 = \frac{1}{LC} \cdot \frac{R_1^2 - \frac{L}{C}}{R_2^2 - \frac{L}{C}}.$$

Учитывая введенные ранее обозначения

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad \rho = \sqrt{\frac{L}{C}},$$

получим выражение для резонансной частоты параллельного контура I вида

$$\omega_p = \omega_0 \sqrt{\frac{\rho^2 - R_1^2}{\rho^2 - R_2^2}}.$$

Если в параллельном контуре принять $R_1 = R_2 = 0$, то такой параллельный контур называется идеальным. Для него

$$\omega_p = \omega_0.$$

В общем случае резонансная частота параллельного контура отличается от резонансной частоты идеального контура ω_0 и зависит от соотношения активных сопротивлений и волнового сопротивления.

Проанализируем выражение для резонансной частоты параллельного контура.

Случай первый: $R_1, R_2 > \rho$. Добротность контура $Q < 1$.

В контурах с низкой добротностью не проявляется никаких особенностей в поведении токов и напряжений, поэтому мы не будем на них останавливаться.

Случай второй: $R_1 > \rho$, $R_2 < \rho$ или $R_1 < \rho$, $R_2 > \rho$.

При таком соотношении параметров под корнем имеем отрицательное число, резонансная частота - мнимая, и резонанс в цепи с такими параметрами невозможен.

Случай третий: $R_1 = R_2 = \rho$. Добротность контура $Q < 1$.

Выражение для резонансной частоты неопределенное, так как в числителе и в знаменателе будут нули. Условие резонанса выполняется на любых частотах, поэтому его называют «безразличным» резонансом.

Случай четвертый: $\rho \gg R_1, R_2$. При таком условии имеем контур с высокой добротностью, в котором ярко проявляются резонансные явления. Для практического использования этот случай наиболее интересен. Рассмотрим его подробнее.

Если $\rho \gg R_1, R_2$, то в выражении для ω_p активными сопротивлениями можно пренебречь, при этом:

$$\omega_p \approx \omega_0; \quad X_1 = \omega_p L \approx \omega_0 L = \rho; \quad X_2 = -\frac{1}{\omega_p C} \approx -\frac{1}{\omega_0 C} = -\rho.$$

Тогда выражение для полной проводимости контура на частоте резонанса имеет вид

$$Y_{рез} = G_{рез} = \frac{R_1}{R_1^2 + \rho^2} + \frac{R_2}{R_2^2 + \rho^2} \approx \frac{R_1}{\rho^2} + \frac{R_2}{\rho^2} = \frac{R_1 + R_2}{\rho^2}.$$

Величина, обратная $G_{рез}$, представляет собой активное сопротивление параллельного контура при резонансе, которое называют эквивалентным сопротивлением и обозначают

$$R_{0e} = \frac{1}{G_{рез}} = \frac{\rho^2}{R_1 + R_2} = \rho Q = (R_1 + R_2) Q^2,$$

где $Q = \frac{\rho}{R_1 + R_2}$ - добротность параллельного контура.

Таким образом, при резонансе эквивалентное сопротивление параллельного контура высокой добротности в Q^2 больше чем сумма активных сопротивлений ветвей.

Проследим качественно зависимость полного сопротивления параллельного контура от частоты (случай четвертый, $\rho \gg R_1, R_2$) (рис. 4.15).

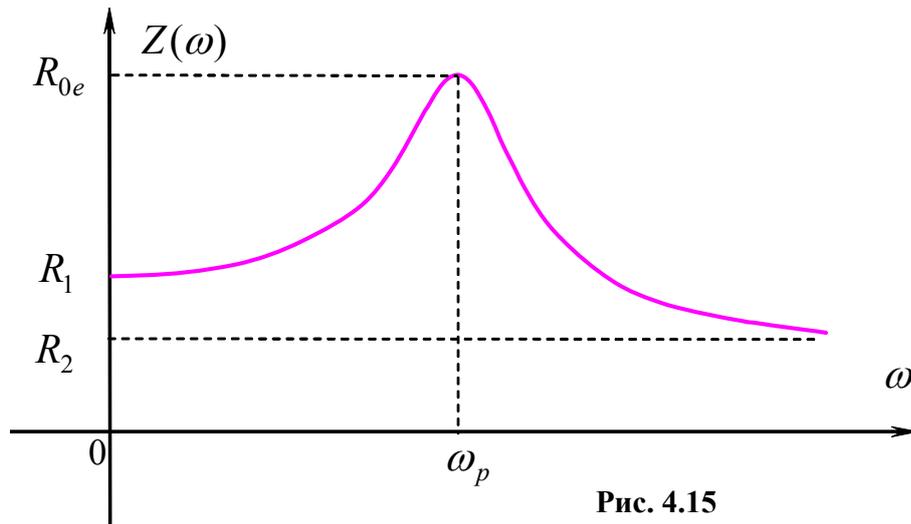


Рис. 4.15

Из анализа схемы параллельного контура первого вида видно, что при $\omega = 0$, $Z = R_1$, а при $\omega \rightarrow \infty$, $Z \rightarrow R_2$.

На резонансной частоте $\omega = \omega_p$ полное сопротивление

$$Z = R_{0e} = (R_1 + R_2)Q^2 = \frac{\rho^2}{R_1 + R_2}.$$

Выводы. Входное сопротивление параллельного контура на резонансной частоте достигает максимального значения, которое в Q^2 раз превышает суммарное активное сопротивление ветвей. В идеальном параллельном контуре ($R_1 = R_2 = 0$) при $\omega \rightarrow \omega_p$ входное сопротивление стремится к бесконечности, т.е. контур не пропускает электрический ток (эквивалентный разрыву цепи).

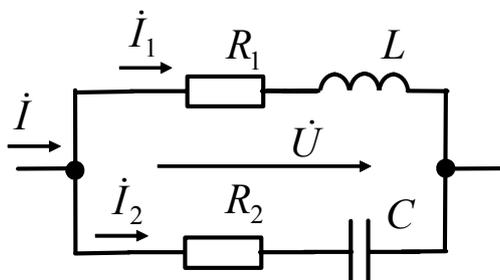


Рис. 4.16

Построим векторную диаграмму параллельного контура I вида (рис. 4.16) для случая резонанса. Обозначим токи в ветвях $-I_1$ и I_2 , а общий ток - I . Представим общий ток в виде суммы активной и реактивной составляющих $\dot{I} = \dot{I}_a + \dot{I}_p$. Модуль реактивной составляющей можно записать через реактивную проводимость

$$I_p = UB = U \left(\frac{X_1}{R_1^2 + X_1^2} + \frac{X_2}{R_2^2 + X_2^2} \right) \Big|_{\omega=\omega_p} = U \left(\frac{\rho}{R_1^2 + \rho^2} - \frac{\rho}{R_2^2 + \rho^2} \right) \approx \approx \frac{U}{\rho} - \frac{U}{\rho} = I_{p1} - I_{p2} = 0.$$

При резонансе $B = 0$, поэтому реактивная составляющая общего тока равна нулю. Реактивные составляющие токов в ветвях I_{p1} и I_{p2} равны между собой по величине, противоположно направлены и компенсируют друг друга. Поэтому резонанс в параллельном контуре получил название **резонанса токов**.

Общий ток при резонансе равен активному току

$$I = I_a = UG = U \left(\frac{R_1}{R_1^2 + X_1^2} + \frac{R_2}{R_2^2 + X_2^2} \right) \Big|_{\omega=\omega_p} \approx U \left(\frac{R_1}{\rho^2} + \frac{R_2}{\rho^2} \right) =$$

$$= I_{a1} + I_{a2} = \frac{U}{\rho} \cdot \frac{R_1 + R_2}{\rho} = I_p \cdot \frac{1}{Q}.$$

Откуда получаем $I_p = QI_a = QI$. При $Q \gg 1$, $I_p \gg I_a$.

Вывод. При резонансе токи в параллельных ветвях контура высокой добротности в Q раз превышают ток на входе контура.

Векторная диаграмма параллельного контура при $\omega = \omega_p$ приведена на рис. 4.17.

Аналогично рассмотренному выше последовательному контуру, при резонансе параллельный контур потребляет от источника только активную мощность. Обмена реактивной мощностью между источником и цепью не происходит. Обмен энергией между магнитным полем индуктивности и электрическим полем емкости сбалансирован, т.е. энергия, которая накапливается за четверть периода в электрическом поле емкости, за другую четверть периода полностью отдается индуктивности и наоборот.

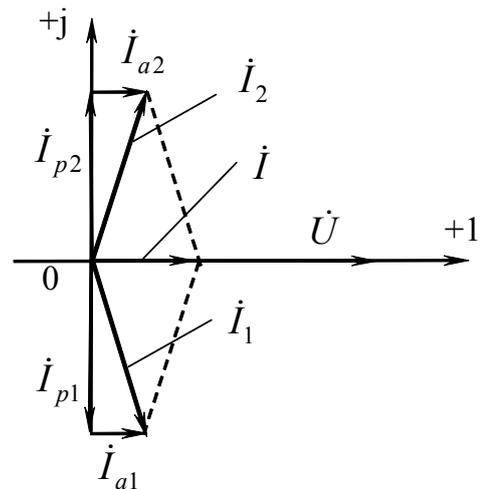


Рис. 4.17

4.5. Частотные и резонансные характеристики параллельного контура.

Анализ частотных и резонансных характеристик параллельных контуров I -IV вида, которые содержат активные сопротивления в ветвях с емкостью и индуктивностью, довольно сложный, а полученные при этом выводы не оправдывают затрат времени.

Для получения представления о частотных и резонансных характеристиках параллельного контура рассмотрим простейшую схему (рис. 4.18,а). В этой схеме:

$$\underline{Y} = G - jB = G - j(B_L - B_C); \quad B = \frac{1}{\omega L} - \omega C.$$

Модуль и аргумент полной проводимости

$$Y = \sqrt{G^2 + B^2} = \sqrt{G^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C \right)^2}; \quad \varphi = \arctg \frac{B}{G}.$$

Частотные характеристики такого параллельного контура приведены на рис. 4.18,б.

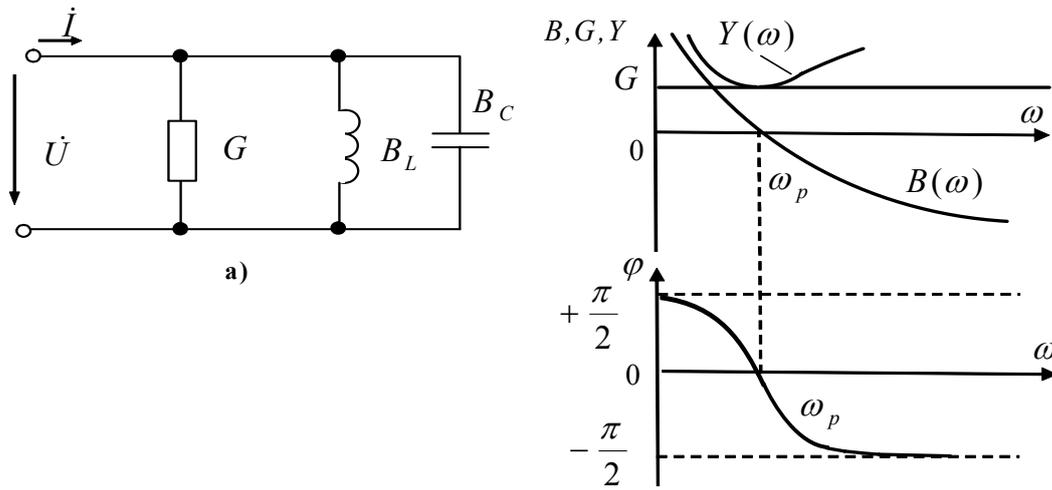


Рис. 4.18

При резонансе происходит изменение характера реактивной проводимости.

Резонансные кривые контура приведены на рис. 4.19.

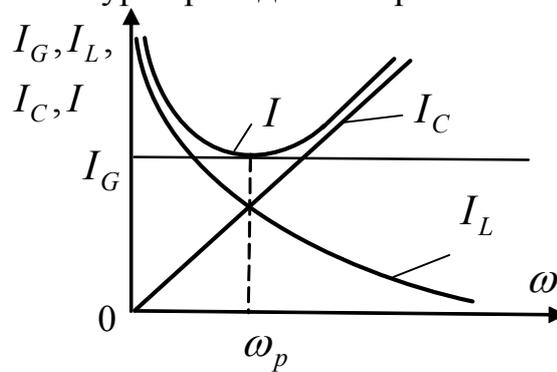


Рис. 4.19

4.6. Условие передачи максимальной активной мощности от источника к нагрузке.

На практике часто необходимо подобрать такое комплексное сопротивление нагрузки, которое позволяет для данного источника энергии обеспечить режим передачи в нагрузку наибольшей активной мощности.

Пусть источник энергии представляет собой какой-либо активный двухполюсник (рис. 4.20,а). Согласно теореме Тевенена представим его в виде источника напряжения (рис. 4.20,б).

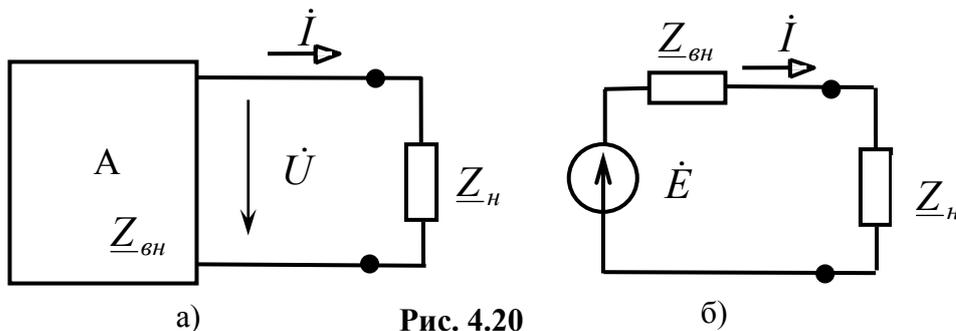


Рис. 4.20

В общем случае внутреннее сопротивление источника напряжения $\underline{Z}_{вн} = R_{вн} + jX_{вн}$ и сопротивление нагрузки $\underline{Z}_н = R_н + jX_н$ являются комплексными.

Активная мощность, которая передается в нагрузку, $P = I^2 R_н$. При $\underline{Z}_н = 0$ ($R_н = X_н = 0$) активная мощность $P = 0$.

При $\underline{Z}_н \rightarrow \infty$ ($R_н \neq 0$) ток $\dot{I} = \frac{\dot{E}}{\underline{Z}_{вн} + \underline{Z}_н} \rightarrow 0$ и активная мощность в нагрузке также стремится к нулю.

Определим, при каком сопротивлении нагрузки активная мощность, которая передается от источника к нагрузке, будет максимальной.

Рассмотрим выражение для активной мощности

$$P = R_н I^2 = R_н \frac{E^2}{|\underline{Z}_н + \underline{Z}_{вн}|^2} = E^2 \frac{R_н}{(R_н + R_{вн})^2 + (X_н + X_{вн})^2}.$$

Максимум активной мощности будет в том случае, когда знаменатель будет минимальным. В знаменателе мы имеем сумму квадратов двух величин. Из двух слагаемых только второе слагаемое может равняться нулю. Т.е.

$$X_н + X_{вн} = 0, \text{ или } X_н = -X_{вн}.$$

Это первое условие передачи максимальной активной мощности от источника к нагрузке, которая отвечает условию последовательного резонанса в цепи.

Таким образом, максимум активной мощности, которая передается в нагрузку, может иметь место при условии, если нагрузка и источник имеют одинаковые по модулю, но разные по характеру реактивные сопротивления.

При выполнении этого условия выражение для активной мощности приобретает вид

$$P = E^2 \frac{R_н}{(R_н + R_{вн})^2}.$$

Определим, при каком соотношении между $R_н$ и $R_{вн}$ активная мощность будет максимальна. Для этого возьмем производную от мощности по активному сопротивлению нагрузки и приравняем ее к нулю

$$\frac{dP}{dR_н} = E^2 \frac{(R_н + R_{вн})^2 - 2R_н(R_н + R_{вн})}{(R_н + R_{вн})^4} = 0.$$

$$\text{Откуда } R_н + R_{вн} - 2R_н = 0, \text{ или } R_н = R_{вн}.$$

Это второе условие передачи максимальной активной мощности.

Объединим первое и второе условие. Тогда имеем

$$\underline{Z}_н = \underline{Z}_{вн}^*.$$

Таким образом, комплексное сопротивление нагрузки должно быть комплексно сопряженным внутреннему сопротивлению источника.

Режим, при котором в нагрузку передается максимальная активная мощность, называется **согласованным режимом**.

Вывод. Максимальная активная мощность передается от источника к нагрузке при условии, что сопротивление нагрузки равняется комплексно сопряженному внутреннему сопротивлению источника энергии.

При этом условии мощность, которая потребляется нагрузкой, равняется мощности потерь внутри источника, т.е.

$$P_n = P_{ист.} \quad \text{или} \quad R_n I^2 = R_{вн} I^2.$$

Таким образом, КПД источника в режиме передачи максимальной активной мощности

$$\eta = \frac{R_n I^2}{EI} = \frac{R_n}{E} \cdot \frac{E}{R_n + R_{вн}} = \frac{R_n}{R_n + R_{вн}} = 0,5.$$

В мощных энергетических системах КПД должен быть достаточно высоким (75-90%), что отвечает условию $R_n \gg R_{вн}$. При этом к нагрузке передается мощность меньшая максимальной. В радиотехнических устройствах, где мощности сигнала не большие, а КПД не имеет особого значения, используется режим передачи максимальной мощности, т.е. согласованный режим.

Примеры согласования.

1. В телевизионных антеннах мощность сигнала очень маленькая и чтобы передать его с минимальными потерями, выходное сопротивление самой антенны обязательно согласовывают с входным сопротивлением кабеля, а выходное сопротивление кабеля - с входным сопротивлением первого каскада телевизионного приемника.

2. В инструкциях по эксплуатации мощных усилителей звуковых частот обязательно указывается, что к выходу нельзя подключать другие типы акустических систем, если они не согласованы с выходным сопротивлением усилителя. При согласованной нагрузке мощность усилителя поровну делится между выходным каскадом усилителя и акустической системой. Если выяснится, что $R_n < R_{вн}$, то мощность, которую должен рассеивать выходной каскад, может увеличиться почти вдвое, что приведет к выходу его из строя.

3. При приеме СВЧ - терапии в поликлинике после включения аппарата медсестра обязательно подстраивает прибор так, чтобы обеспечить передачу максимальной активной мощности от генератора сверхвысоких частот к месту, которое прогревается, и только после этого пациент ощущает появление тепла.

В тех случаях, когда не выполняются условия передачи максимальной активной мощности и нельзя изменять сопротивление нагрузки, то между источником и нагрузкой включается согласующее устройство, например, трансформатор.

РАЗДЕЛ 5

ГАРМОНИЧЕСКИЙ РЕЖИМ В ЦЕПЯХ СО ВЗАИМНОЙ ИНДУКТИВНОСТЬЮ

Лекция 10

План лекции:

- 5.1. Взаимная индуктивность.
- 5.2. Согласное и встречное включение индуктивных элементов.
- 5.3. Экспериментальное определение взаимной индуктивности и полярности катушек.
- 5.4. Индуктивность рассеяния катушек. Коэффициент связи.
- 5.5. Расчет цепей со взаимной индуктивностью при гармоническом режиме.
- 5.6. Последовательное и параллельное соединение индуктивно связанных катушек.

5.1. Взаимная индуктивность.

В одной из первых лекций был введен параметр индуктивного элемента L как отношение потокосцепления самоиндукции индуктивного элемента к току в этом элементе, т.е.

$$L = \frac{\Psi}{i}.$$

Напомним, что **потокосцеплением самоиндукции** катушки называется сумма магнитных потоков, обусловленных током катушки, сквозь поверхности, которые охватывают витки катушки.

Если две катушки расположены так близко, что часть магнитного потока, который сцеплен с витками одной катушки, связан одновременно с витками второй катушки, то говорят о потокосцеплении взаимной индукции.

Потокосцеплением взаимной индукции двух катушек называется сумма магнитных потоков, создаваемых током одной катушки, сквозь поверхности, которые охватывают витки второй катушки. Т.е. это потокосцепление одного индуктивного элемента, вызванное электрическим током другого элемента.

Скалярная величина, равная отношению потокосцепления взаимной индукции одного элемента к току в другом элементе, который обусловил это потокосцепление, называется **взаимной индуктивностью**:

$$M_{12} = \frac{\Psi_{12}}{i_2}, \quad M_{21} = \frac{\Psi_{21}}{i_1}.$$

Первый индекс показывает, «где» (появляется потокосцепление, наводится ЭДС и т.п.).

Второй индекс показывает «от чего» (от какого элемента, от какого тока возникает потокосцепление, наводится ЭДС и т.п.).

Таким образом, M_{12} - взаимная индуктивность в первом элементе за счет потокосцепления, которое создается потоком второго элемента.

M_{21} - взаимная индуктивность во втором элементе за счет потокосцепления, которое создается потоком первого элемента.

Для линейных элементов выполняется принцип взаимности:

если $i_1 = i_2$, то $\Psi_{12} = \Psi_{21}$, откуда

$$M_{12} = M_{21} = M.$$

Взаимная индуктивность M - это алгебраическая величина. При одинаковом направлении потоков самоиндукции и взаимной индукции в индуктивном элементе взаимная индуктивность берется со знаком «+», при встречном - со знаком «-».

Взаимная индуктивность характеризует не самостоятельный элемент цепи, а лишь магнитную связь между индуктивными элементами.

5.2. Согласно и встречное включение индуктивных элементов.

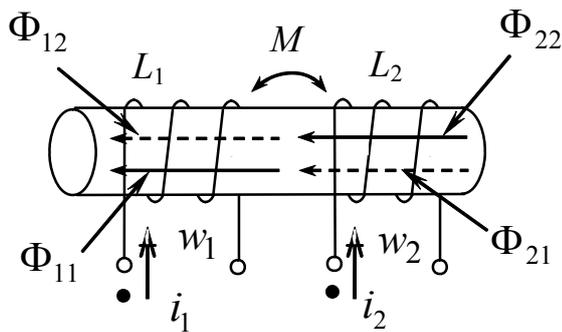


Рис. 5.1

Рассмотрим две индуктивно связанные катушки, которые намотаны на одном каркасе. Первая катушка имеет количество витков w_1 и индуктивность L_1 , соответственно вторая катушка - w_2 и L_2 . Катушки будем считать линейными элементами, т.е. индуктивности L_1 и L_2 не будут зависеть от токов, которые протекают через них. Намотка катушек бывает левая и правая. На рис. 5.1 обе катушки имеют правую намотку.

Зададимся положительными направлениями токов i_1 и i_2 в витках катушек. Хотя мы и рассматриваем гармонический ток, который каждую половину периода изменяет свое направление, указывать положительное направление следует обязательно, так как на этом строится дальнейшее рассмотрение индуктивно связанных катушек.

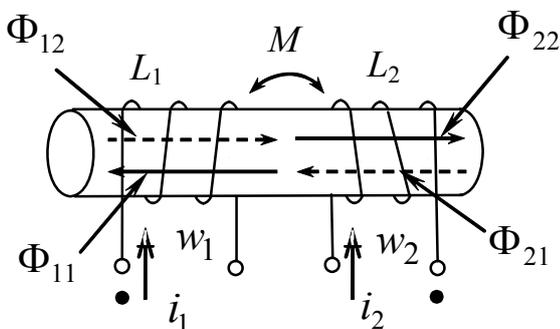


Рис. 5.2

Положительные направления токов и магнитных потоков, которые ими создаются, связаны между собой правилом правого винта. При выбранных положительных направлениях токов магнитные потоки само- и взаимоиндукции направлены одинаково (согласно), поэтому они складываются.

Если намотка двух катушек разная (рис. 5.2), то при выбранных положительных направлениях токов магнитные потоки направлены противоположно (встречно), поэтому они будут вычитаться.

Включение катушек называется **согласным**, если при заданных положительных направлениях токов их магнитные потоки складываются (усиливаются).

Включение катушек называется **встречным**, если при заданных положительных направлениях токов их магнитные потоки вычитаются (ослабляются).

Суммарный магнитный поток, который пронизывает каждый виток первой катушки

$$\Phi_1 = \Phi_{11} \pm \Phi_{12},$$

а второй катушки

$$\Phi_2 = \Phi_{22} \pm \Phi_{21}.$$

Таким образом, в случае магнитной связи двух катушек магнитный поток состоит из двух составляющих: собственного потока катушки, созданного ее током, и потока, который создается током другой катушки.

Знак «+» относится к согласному включению, знак «-» - к встречному.

Если второй ток направить в правый вывод катушки, то включение катушек изменится на противоположное. Т.е. выводы катушек не равноценны. В таком случае говорят, что они являются полярными. Индуктивно связанные катушки являются полярными устройствами.

Зажимы двух индуктивно связанных катушек называются одноименными, если при одинаковых положительных направлениях токов относительно этих зажимов включение катушек будет согласным. Одноименные зажимы катушек обозначаются точками (•) или звездочками (*).

От магнитных потоков катушек перейдем к потокосцеплению, для чего левую и правую части уравнений, которые определяют магнитные потоки Φ_1 и Φ_2 умножим соответственно на число витков w_1 и w_2 . Получим:

$$\Psi_1 = \Psi_{11} \pm \Psi_{12} = L_1 i_1 \pm M i_2;$$

$$\Psi_2 = \Psi_{22} \pm \Psi_{21} = L_2 i_2 \pm M i_1.$$

Напряжение на первой катушке

$$u_1 = \frac{d\Psi_1}{dt} = \frac{d\Psi_{11}}{dt} \pm \frac{d\Psi_{12}}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt} \pm M \frac{di_2}{dt}.$$

Напряжение на второй катушке

$$u_2 = \frac{d\Psi_2}{dt} = \frac{d\Psi_{22}}{dt} \pm \frac{d\Psi_{21}}{dt} = L_2 \frac{di_2}{dt} \pm M \frac{di_1}{dt}.$$

Эти выражения записаны для мгновенных значений, поэтому являются справедливыми для любых токов и напряжений.

Для гармонического тока в комплексной форме действующие значения напряжений на индуктивно связанных катушках имеют вид:

$$\dot{U}_1 = j\omega L_1 \dot{I}_1 \pm j\omega M \dot{I}_2;$$

$$\dot{U}_2 = j\omega L_2 \dot{I}_2 \pm j\omega M \dot{I}_1.$$

Выводы: 1. Индуктивно связанные катушки являются полярными элементами.

2. Магнитная связь индуктивных элементов дает дополнительное напряжение на каждом из них вида $\pm j\omega M\dot{I}$.

Если будет не два, а три или более индуктивно связанных элемента, то к выражению для напряжения на каждом из них прибавляются еще слагаемые от каждой последующей связи.

5.3. Экспериментальное определение взаимной индуктивности и полярности катушек.

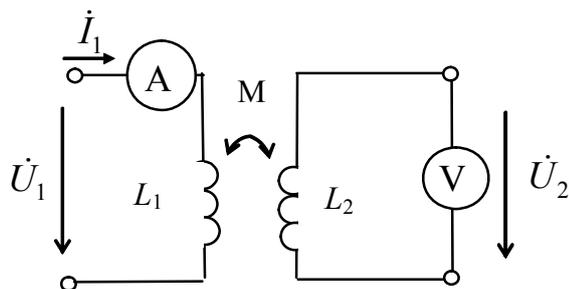


Рис. 5.3

Один из простых способов экспериментального определения взаимной индуктивности M основан на выражении для напряжения \dot{U}_2 и объясняется на примере схемы рис. 5.3.

При холостом ходе на второй катушке, когда $\dot{I}_2 = 0$, комплексное напряжение на ней

$$\dot{U}_2 = \pm j\omega M\dot{I}_1.$$

Переходя к действующим значениям величин, которые измеряют приборы, имеем

$$U_2 = \omega M I_1.$$

Таким образом, если измерить ток первой катушки и напряжение холостого хода на второй, можно определить M по формуле

$$M = \frac{U_2}{\omega I_1}.$$

Простейший способ определения одноименных зажимов – визуальный (по виду намотки катушек). Но в большинстве практических случаев такой способ определения одноименных зажимов невозможен.

Рассмотрим два экспериментальных метода определения одноименных зажимов.

Первый метод. Соберем цепь по схеме рис. 5.4 с источником гармонического напряжения и амперметром. Запишем показание амперметра I_1 и поменяем местами зажимы одной катушки. Снова запишем показание амперметра I_2 .

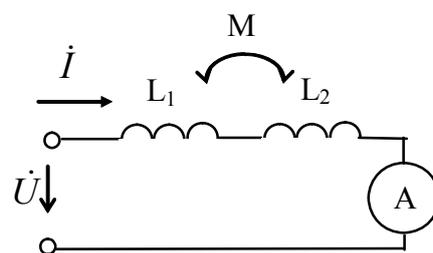


Рис. 5.4

Если $I_1 > I_2$, то первое включение катушек было встречным, если $I_1 < I_2$ – согласным.

Второй метод. Одну из катушек рис. 5.5 будем подключать к источнику постоянного напряжения с помощью ключа или просто замыкать и размыкать провод, а ко второй катушке подключим вольтметр постоянного напряжения.

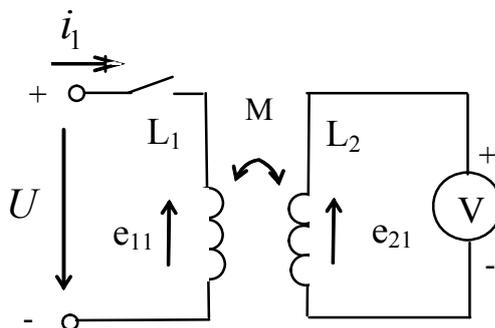


Рис. 5.5

В момент закорачивания ключа в первой катушке возникает ЭДС самоиндукции e_{11} , которая направлена против тока i_1 . В случае, когда одноименные зажимы катушек подключены к положительному полюсу источника и положительному зажиму вольтметра, ЭДС аналогичного направления e_{21} , но взаимной индукции возникнет и во второй катушке. При этом стрелка вольтметра отклонится вправо от нуля.

Если стрелка вольтметра при замыкании ключа отклоняется в противоположную сторону, то положительные зажимы источника и вольтметра подключены к разноименным зажимам катушек.

5.4. Индуктивность рассеяния катушек. Коэффициент связи.

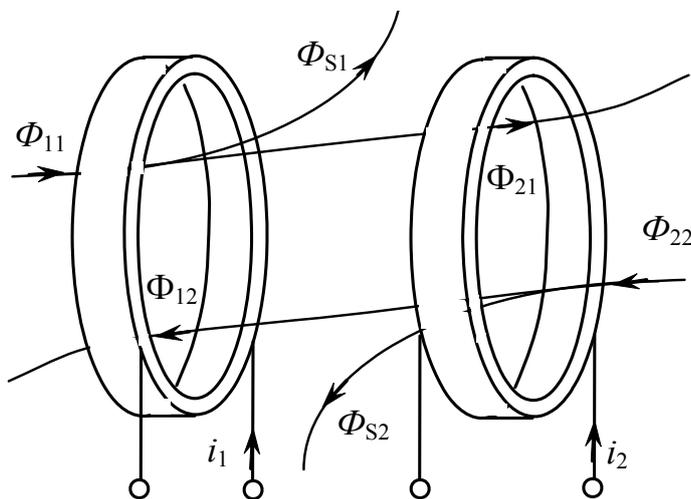


Рис. 5.6

Рассмотрим две индуктивно связанные катушки, которые выполнены в виде тонких колец большого диаметра, расположенные рядом (рис. 5.6). Индуктивность и число витков катушек соответственно L_1, w_1 и L_2, w_2 . Пропустим ток через первую катушку. При этом возникает поток Φ_{11} , часть которого Φ_{21} достигнет второй катушки. Часть потока первой катушки, которая не достигла витков второй катушки, назовем потоком рассеяния первой катушки и обозначим Φ_{S1} .

Тогда

$$\Phi_{11} = \Phi_{21} + \Phi_{S1}.$$

Аналогично для второй катушки

$$\Phi_{22} = \Phi_{12} + \Phi_{S2}.$$

Потоку Φ_{11} соответствует потокосцепление $\Psi_{11} = w_1 \Phi_{11} = L_1 I_1$.

Потоку Φ_{21} соответствует потокосцепление $\Psi_{21} = w_2 \Phi_{21} = M I_1$.

По аналогии введем потокосцепление рассеяния $\Psi_{S1} = w_1 \Phi_{S1} = L_{S1} I_1$,

где L_{S1} - индуктивность рассеяния первой катушки.

Тогда

$$\begin{aligned} L_{S1} &= \frac{w_1 \Phi_{S1}}{I_1} = \frac{w_1}{I_1} (\Phi_{11} - \Phi_{21}) = \frac{w_1 \Phi_{11}}{I_1} - \frac{w_1 \Phi_{21}}{I_1} = \frac{\Psi_{11}}{I_1} - \frac{w_1 \Phi_{21}}{I_1} \cdot \frac{w_2}{w_2} = \\ &= L_1 - \frac{w_1}{w_2} M. \end{aligned}$$

$$\text{Аналогично } L_{S2} = L_2 - \frac{w_2}{w_1} M.$$

Физический смысл индуктивности рассеяния становится понятным, если принять $w_1 = w_2$. Тогда **индуктивность рассеяния** можно толковать как разность между собственной и взаимной индуктивностями катушки, т.е.

$$L_{S1} = L_1 - M;$$

$$L_{S2} = L_2 - M.$$

Степень индуктивной связи между двумя катушками можно характеризовать отношениями

$$\frac{\Psi_{21}}{\Psi_{11}} = \frac{\Phi_{21}}{\Phi_{11}} \quad \text{и} \quad \frac{\Psi_{12}}{\Psi_{22}} = \frac{\Phi_{12}}{\Phi_{22}},$$

которые показывают, какая часть потокосцепления (магнитного потока), создаваемая током одной катушки, связана с витками второй катушки. В общем случае эти соотношения не равняются друг другу, поэтому для характеристики степени связи вводят коэффициент связи, который определяется как среднее геометрическое этих двух отношений

$$\kappa = \sqrt{\frac{\Psi_{21} \cdot \Psi_{12}}{\Psi_{11} \cdot \Psi_{22}}} = \sqrt{\frac{M I_1 \cdot M I_2}{L_1 I_1 \cdot L_2 I_2}} = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}.$$

Коэффициент связи не имеет размерности и может находиться в пределах от 0 до 1

$$0 \leq \kappa < 1.$$

5.5. Расчет цепей со взаимной индуктивностью при гармоническом режиме.

Как было показано ранее, за счет индуктивных связей в выражении для напряжения на индуктивности появляются дополнительные слагаемые вида $\pm j\omega M \dot{I}$

$$\dot{U}_{L1} = j\omega L_1 \dot{I}_1 \pm j\omega M_{12} \dot{I}_2 \pm j\omega M_{13} \dot{I}_3 \pm \dots = \underline{Z}_1 \dot{I}_1 \pm \underline{Z}_{M2} \dot{I}_2 \pm \underline{Z}_{M3} \dot{I}_3 \pm \dots$$

Величину $j\omega M$ обозначают \underline{Z}_M и называют **комплексным сопротивлением взаимной индуктивности**

$$\underline{Z}_M = j\omega M.$$

Отметим, что дополнительное сопротивление в индуктивном элементе L при согласном включении имеет тот же знак, что и напряжение, обусловленное собственной индуктивностью. При встречном включении знак - противоположный.

Для расчета цепей со взаимной индуктивностью можно использовать метод уравнений Кирхгофа, метод контурных токов, а также метод эквивалентного генератора при условии, что ветвь, в которой определяется ток, не имеет магнитной связи с ветвями, которые входят в состав двухполюсника.

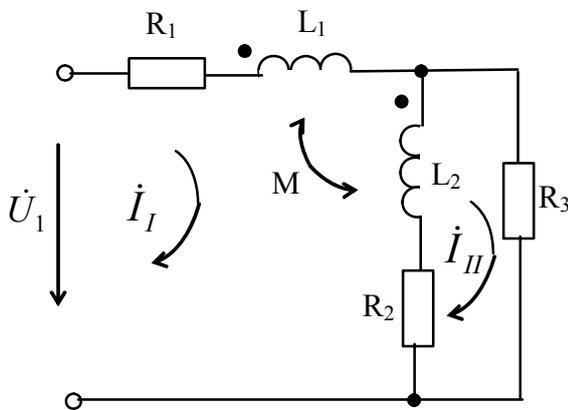


Рис. 5.7

Нельзя использовать метод эквивалентных преобразований и непосредственно метод узловых напряжений, так как ток в ветви определяется не только напряжением между узлами, но и магнитными связями с другими ветвями.

Для обоснования метода контурных токов и его модификации используем метод уравнений Кирхгофа и определим, что нового вносит магнитная связь индуктивных элементов.

Рассмотрим цепь с двумя контурами (рис. 5.7).

Составим уравнения по второму закону Кирхгофа для I и II контуров, записав токи в ветвях через контурные токи.

Для первого контура

$$\dot{U}_1 = R_1 \dot{I}_I + j\omega L_1 \dot{I}_I + j\omega M (\dot{I}_I - \dot{I}_{II}) + j\omega L_2 (\dot{I}_I - \dot{I}_{II}) + j\omega M \dot{I}_I + R_2 (\dot{I}_I - \dot{I}_{II}).$$

Для второго контура

$$0 = R_3 \dot{I}_{II} + R_2 (\dot{I}_{II} - \dot{I}_I) + j\omega L_2 (\dot{I}_{II} - \dot{I}_I) - j\omega M \dot{I}_I.$$

Перепишем уравнения, группируя слагаемые с одинаковыми контурными токами

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= (R_1 + j\omega L_1 + R_2 + j\omega L_2 + 2j\omega M) \dot{I}_I + (-j\omega L_2 - R_2 - j\omega M) \dot{I}_{II} = \\ &= (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + 2\underline{Z}_M) \dot{I}_I + (-\underline{Z}_2 - \underline{Z}_M) \dot{I}_{II} = \underline{Z}_{11} \dot{I}_I + \underline{Z}_{12} \dot{I}_{II}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &= (-R_2 - j\omega L_2 - j\omega M) \dot{I}_I + (R_3 + R_2 + j\omega L_2) \dot{I}_{II} = \\ &= (-\underline{Z}_2 - \underline{Z}_M) \dot{I}_I + (\underline{Z}_3 + \underline{Z}_2) \dot{I}_{II} = \underline{Z}_{21} \dot{I}_I + \underline{Z}_{22} \dot{I}_{II}, \end{aligned}$$

где $\underline{Z}_{11} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + 2\underline{Z}_M$; $\underline{Z}_{22} = R_2 + R_3 + j\omega L_2$ - собственные сопротивления контуров;

$$\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21} - \text{общее сопротивление контуров.}$$

Запишем матрицу контурных сопротивлений цепи для данной схемы

$$Z = \begin{pmatrix} \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + 2\underline{Z}_M & -\underline{Z}_2 - \underline{Z}_M \\ -\underline{Z}_2 - \underline{Z}_M & \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 \end{pmatrix}.$$

Сформулируем правило для формального составления матрицы контурных сопротивлений цепи со взаимной индуктивностью.

При определении собственных сопротивлений контура учитываются только индуктивные связи тока данного контура с самим собой, т.е. учитываются индуктивные связи между катушками, которые входят в данный контур. Если между катушками одного контура есть индуктивная связь, тогда к собственному сопротивлению не связанного контура прибавляется слагаемое вида $\pm 2j\omega M$, где «+» берется при согласном включении катушек относительно данного контурного тока, а «-» при встречном. Если нет связи – то нет и дополнительного слагаемого.

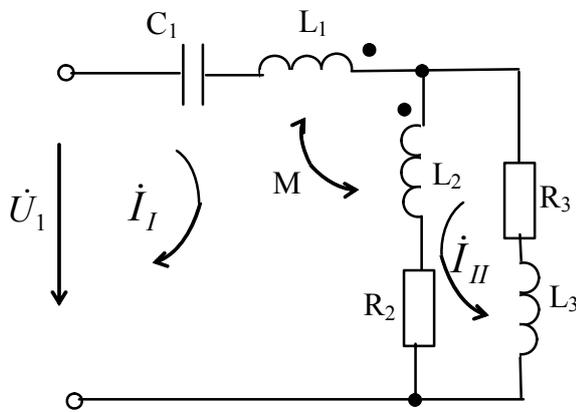


Рис. 5.8

К общему сопротивлению двух контуров, которые имеют индуктивные связи друг с другом, наряду с сопротивлением общей ветви, знак которого определяется обычным образом, добавляется составляющая вида $\pm j\omega M$, где «+» берется при согласном включении катушек относительно своих контурных токов, а «-» при встречном.

Пример. Для цепи рис. 5.8 составить матрицу комплексных контурных сопротивлений цепи.

$$Z = \begin{pmatrix} \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 - 2\underline{Z}_M & \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M \\ \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M & \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 \end{pmatrix},$$

где $\underline{Z}_1 = \frac{1}{j\omega C_1} + j\omega L_1$; $\underline{Z}_2 = R_2 + j\omega L_2$; $\underline{Z}_3 = R_3 + j\omega L_3$; $\underline{Z}_M = j\omega M$.

В некоторых случаях расчет электрических цепей со взаимной индуктивностью можно значительно упростить, если провести эквивалентную замену части схемы, которая содержит индуктивные связи, схемой без индуктивных связей.

Такая эквивалентная замена индуктивных связей ветвей иногда называется «развязкой» индуктивных связей.

Характерным примером «развязки» является схема, у которой индуктивно связанные элементы подсоединены к одному узлу (рис. 5.9,а).

Запишем систему уравнений в комплексной форме для расчета цепи рис. 5.9,а методом уравнений Кирхгофа.

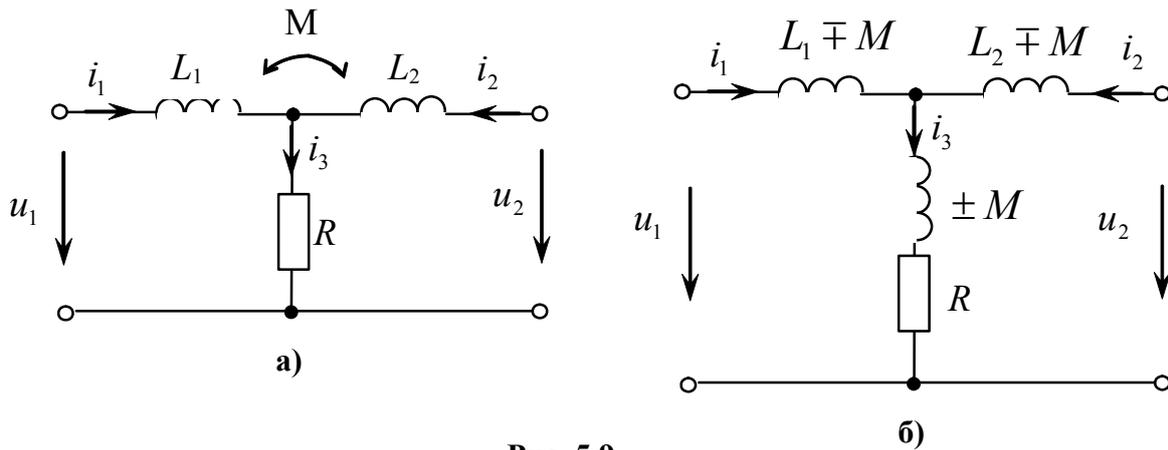


Рис. 5.9

$$\dot{I}_1 + \dot{I}_2 - \dot{I}_3 = 0;$$

$$\dot{U}_1 = j\omega L_1 \dot{I}_1 \pm j\omega M \dot{I}_2 + R \dot{I}_3;$$

$$\dot{U}_2 = j\omega L_2 \dot{I}_2 \pm j\omega M \dot{I}_1 + R \dot{I}_3.$$

Знак «+» берем при подключении катушек к общему узлу одноименными зажимами (согласное включение), а знак «-» - при подключении разноименными зажимами (встречное включение).

Прибавим и отнимем к нижним двум уравнениям слагаемые вида $j\omega M \dot{I}$. Тогда система уравнений приобретает вид

$$\dot{I}_1 + \dot{I}_2 - \dot{I}_3 = 0;$$

$$\dot{U}_1 = j\omega L_1 \dot{I}_1 \pm j\omega M \dot{I}_2 \pm j\omega M \dot{I}_1 \mp j\omega M \dot{I}_1 + R \dot{I}_3;$$

$$\dot{U}_2 = j\omega L_2 \dot{I}_2 \pm j\omega M \dot{I}_1 \pm j\omega M \dot{I}_2 \mp j\omega M \dot{I}_2 + R \dot{I}_3.$$

Группируем слагаемые и учитывая, что $\dot{I}_1 + \dot{I}_2 = \dot{I}_3$, получаем

$$\dot{I}_1 + \dot{I}_2 - \dot{I}_3 = 0;$$

$$\dot{U}_1 = j\omega(L_1 \mp M) \dot{I}_1 \pm j\omega M \dot{I}_3 + R \dot{I}_3;$$

$$\dot{U}_2 = j\omega(L_2 \mp M) \dot{I}_2 \pm j\omega M \dot{I}_3 + R \dot{I}_3.$$

Полученным уравнением отвечает схема замещения рис. 5.9,б, которая эквивалентна исходной схеме цепи, но не имеет индуктивных связей. Верхние знаки берутся в случае подключения индуктивностей к общему узлу одноименными зажимами, а нижние - разноименными.

После развязки эквивалентную схему без индуктивных связей можно рассчитать любым методом, включая метод эквивалентных преобразований.

5.6. Последовательное и параллельное соединение индуктивно связанных катушек.

Рассмотрим последовательное соединение двух индуктивно связанных катушек (рис. 5.10).

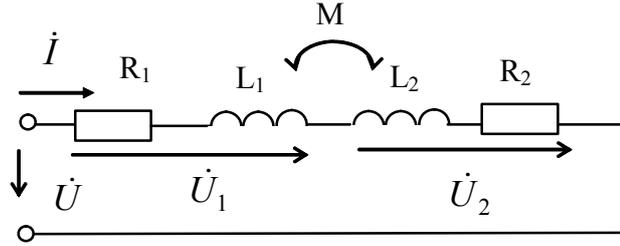


Рис. 5.10

Составим уравнение по второму закону Кирхгофа

$$\dot{U} = R_1 \dot{I} + j\omega L_1 \dot{I} \pm j\omega M \dot{I} + R_2 \dot{I} + j\omega L_2 \dot{I} \pm j\omega M \dot{I} = (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 \pm 2\underline{Z}_M) \dot{I} .$$

Эквивалентное сопротивление такой цепи

$$\underline{Z}_\vartheta = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 \pm 2\underline{Z}_M \neq \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 .$$

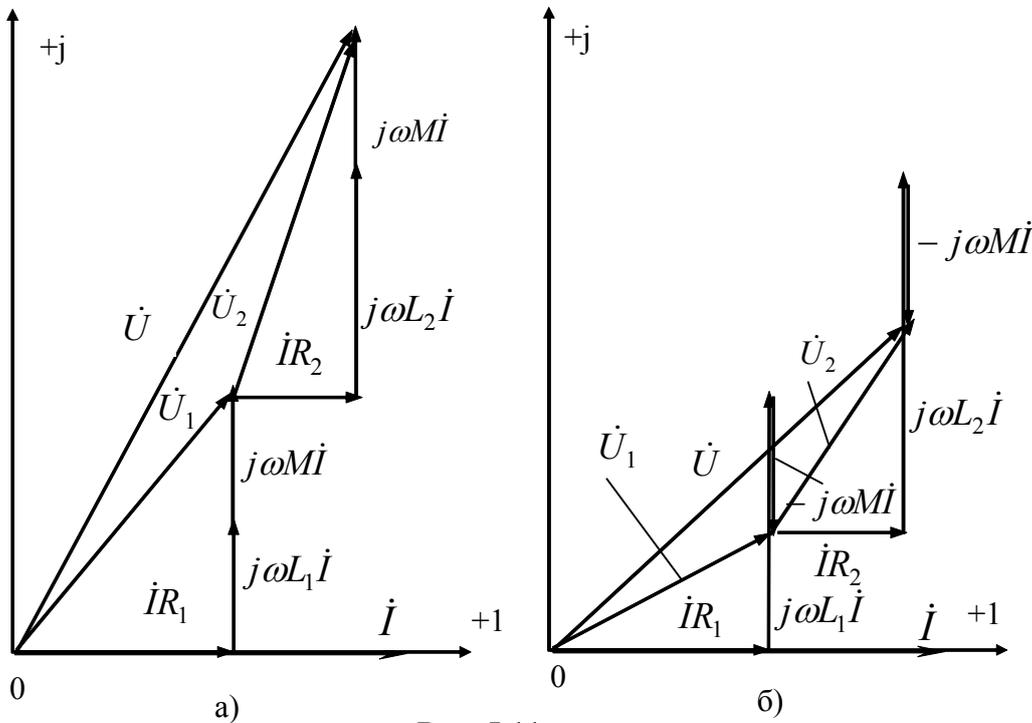


Рис. 5.11

Построим векторные диаграммы цепи согласно уравнению, записанному по второму закону Кирхгофа, для согласного включения (рис. 5.11,а) и встречного включения катушек (рис. 5.11,б), считая начальную фазу тока $\psi_i = 0$.

Здесь рассмотрен случай, когда $M < L_1$ и $M < L_2$.

Возможен ли случай, когда взаимная индуктивность превысит собственную индуктивность, т.е. $M > L_1$ или $M > L_2$?

Для ответа на этот вопрос запишем выражения для собственной индуктивности и взаимной индуктивности катушек:

$$L_1 = \frac{\Psi_{11}}{I_1} = \frac{w_1 \Phi_{11}}{I_1}; \quad M = \frac{\Psi_{21}}{I_1} = \frac{w_2 \Phi_{21}}{I_1} .$$

Понятно, что собственный поток катушки Φ_{11} превышает его часть Φ_{21} , т.е. $\Phi_{11} > \Phi_{21}$. Однако число витков второй катушки w_2 может значительно превышать число витков первой катушки w_1 , т.е. $w_2 \gg w_1$.

В этом случае $M > L_1$. Однако, одновременно обе собственные индуктивности не могут быть меньше взаимной индуктивности катушек. Покажем это.

Величина $(\sqrt{L_1} - \sqrt{L_2})^2 > 0$, откуда $L_1 + L_2 > 2\sqrt{L_1L_2}$. Но коэффициент связи $k = \frac{M}{\sqrt{L_1L_2}} < 1$, поэтому $M < \sqrt{L_1L_2}$, откуда $L_1 + L_2 > 2\sqrt{L_1L_2} > 2M$, что и требовалось доказать.

Построим векторную диаграмму для встречного включения катушек для случая, когда $L_1 < M$, а $L_2 > M$ (рис. 5.12).

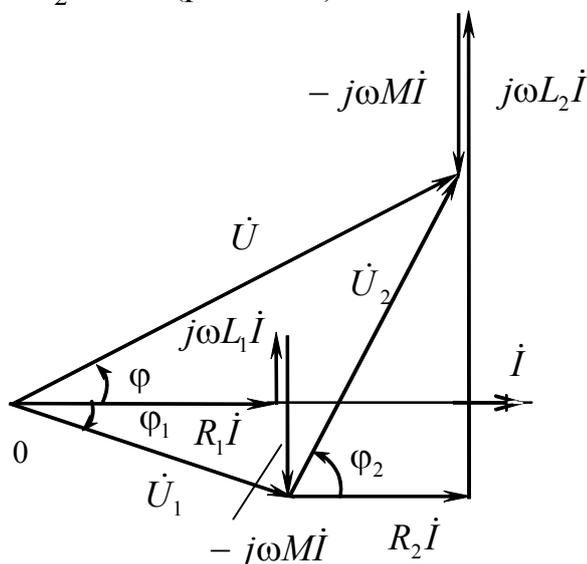


Рис. 5.12

Напряжение на первой катушке

$$\dot{U}_1 = R_1 \dot{I} + j\omega(L_1 - M)\dot{I} = [R_1 + j\omega(L_1 - M)]\dot{I}$$

отстает от тока \dot{I} на угол φ_1 вследствие отрицательного значения величины $L_1 - M$.

Таким образом, режим работы первой катушки подобен поведению емкости $\varphi_1 < 0$ (эффект «мнимой емкости») за счет встречного включения катушек, однако в целом эквивалентное сопротивление обеих катушек обязательно имеет индуктивный характер.

Рассмотрим параллельное включение индуктивно связанных катушек (рис. 5.13).

Определим токи в ветвях цепи. Для

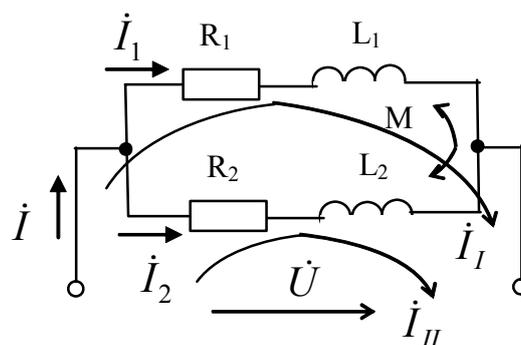


Рис. 5.13

этого используем метод контурных токов. Выберем два независимых контура и укажем направления контурных токов.

Составим матрицу сопротивлений цепи, обозначив: $\underline{Z}_1 = R_1 + j\omega L_1$, $\underline{Z}_2 = R_2 + j\omega L_2$.

$Z = \begin{pmatrix} \underline{Z}_1 & \pm \underline{Z}_M \\ \pm \underline{Z}_M & \underline{Z}_2 \end{pmatrix}$. В данном случае общим сопротивлением двух кон-

туров есть сопротивление взаимной индуктивности $\pm \underline{Z}_M$.

Матрица контурных ЭДС для данной цепи $\dot{E} = \begin{pmatrix} \dot{U} \\ \dot{U} \end{pmatrix}$. Составим обратную

матрицу

$$Z^{-1} = \frac{1}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2} \begin{pmatrix} \underline{Z}_2 & \mp \underline{Z}_M \\ \mp \underline{Z}_M & \underline{Z}_1 \end{pmatrix}$$

и определим матрицу контурных токов

$$\begin{pmatrix} \dot{I}_I \\ \dot{I}_{II} \end{pmatrix} = Z^{-1} E = \frac{1}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2} \begin{pmatrix} \underline{Z}_2 & \mp \underline{Z}_M \\ \mp \underline{Z}_M & \underline{Z}_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{U} \\ \dot{U} \end{pmatrix} = \\ = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2} \begin{pmatrix} \underline{Z}_2 & \mp \underline{Z}_M \\ \mp \underline{Z}_M & \underline{Z}_1 \end{pmatrix} \cdot (1) = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2} \begin{pmatrix} \underline{Z}_2 & \mp \underline{Z}_M \\ \mp \underline{Z}_M & \underline{Z}_1 \end{pmatrix}.$$

Тогда контурные токи

$$\dot{I}_I = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2} (\underline{Z}_2 \mp \underline{Z}_M); \quad \dot{I}_{II} = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2} (\underline{Z}_1 \mp \underline{Z}_M),$$

а ток на входе цепи

$$\dot{I} = \dot{I}_I + \dot{I}_2 = \frac{\dot{U} (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 \mp 2\underline{Z}_M)}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2}.$$

Эквивалентное сопротивление всей цепи

$$\underline{Z}_s = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 - \underline{Z}_M^2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 \mp 2\underline{Z}_M} \neq \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}.$$

Таким образом, полное сопротивление цепи с согласным включением катушек как при последовательном, так и при параллельном их соединении больше, чем полное сопротивление цепи с встречным включением и отличается от полного сопротивления цепи без индуктивных связей. Векторная диаграмма для согласного включения (рис. 5.14) строится по уравнениям:

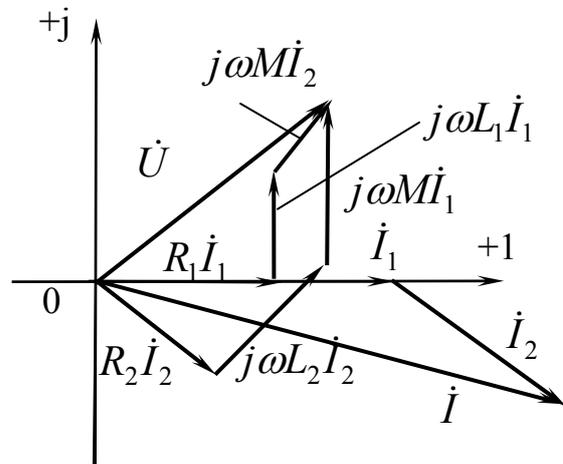


Рис. 5.14

$$\dot{U} = R_1 \dot{I}_1 + j\omega L_1 \dot{I}_1 + j\omega M \dot{I}_2;$$

$$\dot{U} = R_2 \dot{I}_2 + j\omega L_2 \dot{I}_2 + j\omega M \dot{I}_1,$$

а для встречного включения (рис. 5.15) - по уравнениям:

$$\dot{U} = R_1 \dot{I}_1 + j\omega L_1 \dot{I}_1 - j\omega M \dot{I}_2;$$

$$\dot{U} = R_2 \dot{I}_2 + j\omega L_2 \dot{I}_2 - j\omega M \dot{I}_1.$$

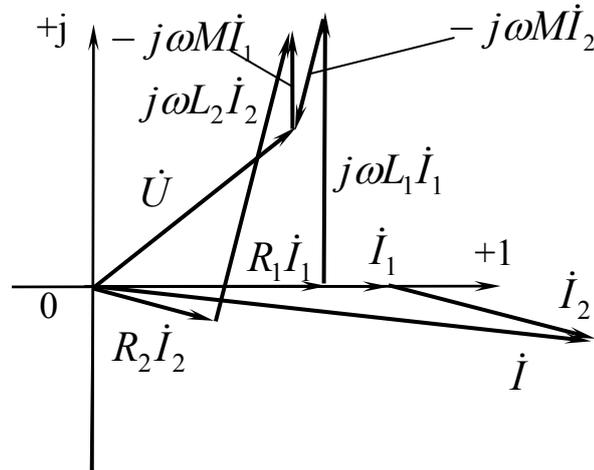


Рис. 5.15

Лекция 11

- 5.7. Трансформатор, работающий в линейном режиме (без насыщения).
- 5.8. Уравнение и векторная диаграмма трансформатора.
- 5.9. Идеальный трансформатор. Коэффициент трансформации.
- 5.10. Схема замещения трансформатора.

5.7. Трансформатор, работающий в линейном режиме (без насыщения).

Трансформатор - это статическое электромагнитное устройство (аппарат), предназначенное для передачи электромагнитной энергии из одной электрической цепи в другую с помощью электромагнитной индукции.

Изобретатель трансформатора - П.М.Яблочков.

Трансформатор обычно используют для преобразований по величине переменных напряжений или токов без изменения частоты, для устранения электрических связей между цепями (развязка цепей), для согласования сопротивлений, в качестве элементов измерительных приборов и т.п.

Трансформатор может иметь несколько катушек, которые имеют индуктивные связи друг с другом.

Рассмотрим трансформатор с двумя обмотками. Схема такого трансформатора представлена на рис. 5.16.

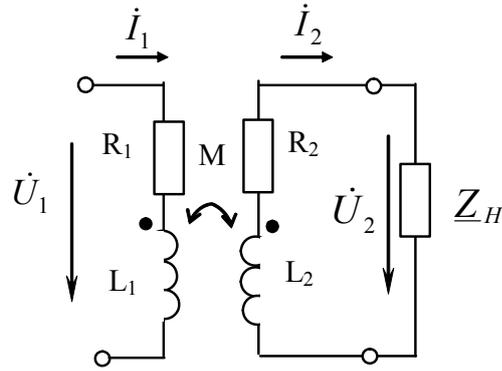


Рис. 5.16

Как видим из направлений токов, для трансформатора принято встречное включение катушек. Обмотка, которая подключается к источнику энергии, называется первичной и все величины, характеризующие ее, обозначаются индексом 1, а обмотка, которая подключается к нагрузке - вторичной и все величины обозначаются индексом 2.

Ограничимся рассмотрением трансформатора, который работает в линейном режиме. Это может быть воздушный трансформатор без сердечника или трансформатор с ферромагнитным сердечником, который работает на линейном участке (без насыщения), при этом потерями в ферромагнетике пренебрегаем.

5.8. Уравнение и векторная диаграмма трансформатора.

Запишем уравнения по второму закону Кирхгофа для первичного и вторичного контура трансформатора в комплексной форме.

$$\dot{U}_1 = R_1 \dot{I}_1 + j\omega L_1 \dot{I}_1 - j\omega M \dot{I}_2;$$

$$0 = R_2 \dot{I}_2 + j\omega L_2 \dot{I}_2 - j\omega M \dot{I}_1 + \dot{U}_2,$$

где $\dot{U}_2 = \underline{Z}_H \dot{I}_2$.

При принятых положительных направлениях токов катушки включены встречно, поэтому дополнительное напряжение, которое вносится в каждый из контуров, берется отрицательным.

Построим векторную диаграмму трансформатора (рис. 5.17) по его уравнениям.

Предположим, что нагрузка имеет активно-индуктивный характер, т.е. $\underline{Z}_H = R_H + jX_H$, где $X_H > 0$. Тогда

$$\dot{U}_2 = \underline{Z}_H \dot{I}_2 = R_H \dot{I}_2 + jX_H \dot{I}_2.$$

Построение диаграммы начнем со второго уравнения, приняв начальную фазу

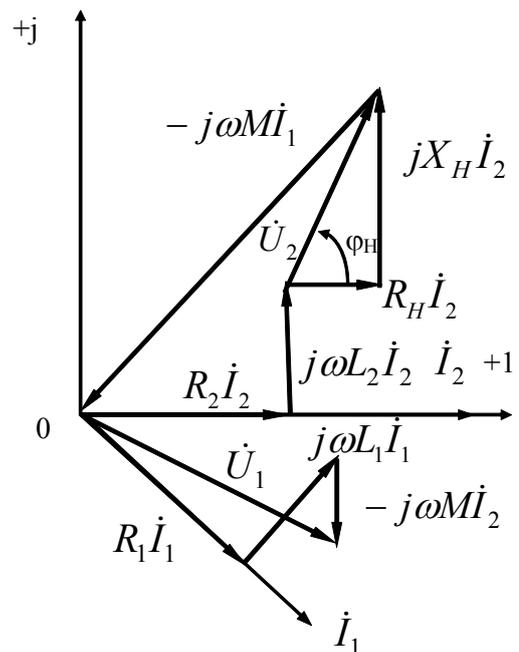


Рис. 5.17

тока \dot{I}_2 равной нулю. Затем последовательно откладываем векторы напряжений $R_2\dot{I}_2$, $j\omega L_2\dot{I}_2$, $R_H\dot{I}_2$, $jX_H\dot{I}_2$. Соединяем последний вектор с началом координат и получаем вектор напряжения $(-j\omega M\dot{I}_1)$. По его направлению определяем направление вектора тока \dot{I}_1 , а дальше переходим к первому уравнению. Откладываем напряжения $R_1\dot{I}_1$, $j\omega L_1\dot{I}_1$, $-j\omega M\dot{I}_2$. Соединяем последний вектор с началом координат и получаем вектор напряжения \dot{U}_1 .

5.9. Идеальный трансформатор. Коэффициент трансформации.

Назначение трансформатора – передавать энергию из одной цепи (обмотки) в другую. Этому мешают потери энергии в активных сопротивлениях R_1 и R_2 (первичной и вторичной обмоток трансформатора), а также рассеяние магнитных потоков индуктивностей, которые характеризуются величинами L_{S1} и L_{S2} .

Вспомним, что индуктивности рассеяния:

$$L_{S1} = L_1 - \frac{w_1}{w_2} M; \quad L_{S2} = L_2 - \frac{w_2}{w_1} M.$$

Трансформатор, в котором отсутствуют потери энергии, т.е.

$$R_1 = R_2 = 0, \quad L_{S1} = L_{S2} = 0,$$

называется **идеальным**.

Идеальный трансформатор обозначается на схемах, как показано на рис. 5.18.

Это схемный элемент, который используется для составления схем замещения реальных трансформаторов. Он учитывает передачу энергии без тепловых потерь и потерь на рассеяние.

Для идеального трансформатора справедливы соотношения:

$$\frac{L_1}{M} = \frac{w_1}{w_2} = k; \quad \frac{L_2}{M} = \frac{w_2}{w_1} = \frac{1}{k},$$

где k - коэффициент трансформации.

Рассмотрим холостой ход идеального трансформатора, когда $\dot{I}_2 = 0$.

Уравнение для первой и второй обмоток трансформатора при этом приобретают вид:

$$\begin{aligned} \dot{U}_{1x} &= j\omega L_1 \dot{I}_1; \\ 0 &= \dot{U}_{2x} - j\omega M \dot{I}_1. \end{aligned}$$

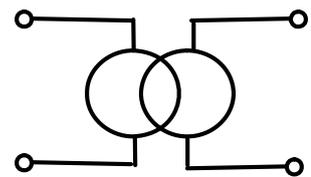


Рис. 5.18

Откуда
$$\frac{\dot{U}_{1x}}{\dot{U}_{2x}} = \frac{L_1}{M} = \frac{w_1}{w_2} = k.$$

На этом соотношении основана работа измерительного трансформатора напряжения. Такой трансформатор напряжения, близкий по своим характеристикам к идеальному, используется для измерения высокого напряжения. Схема подключения измерительного трансформатора напряжения представлена на рис. 5.19.

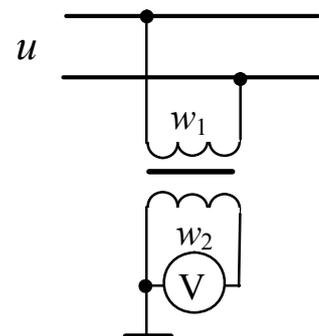


Рис. 5.19

Первичная обмотка измерительного трансформатора с числом витков w_1 подключается к высокому напряжению, а вторичная обмотка с числом витков w_2 — к вольтметру, один из зажимов которого заземляется. Как правило, с измерительными трансформаторами используются вольтметры с пределом измерения $100/\sqrt{3}$, 100 или 150 В. Коэффициент трансформации измерительного трансформатора берется из ряда $k = 2, 5, 10, 20, 50, 100 \dots$

Применение измерительных трансформаторов в цепях высокого напряжения позволяет обеспечить безопасность персонала, который обслуживает приборы.

Рассмотрим режим короткого замыкания идеального трансформатора, когда $\dot{U}_2 = 0$.

Второе уравнение приобретает вид

$$0 = j\omega L_2 \dot{I}_{2к} - j\omega M \dot{I}_{1к}.$$

Откуда
$$\frac{\dot{I}_{1к}}{\dot{I}_{2к}} = \frac{L_2}{M} = \frac{w_2}{w_1} = \frac{1}{k}.$$

Если $w_2 > w_1$, то $\frac{1}{k} > 1$.

При коротком замыкании отношение первичного тока ко вторичному равняется величине, обратной коэффициенту трансформации. На этом основан принцип работы измерительного трансформатора тока, который работает в режиме короткого замыкания. Он используется для измерения обычными амперметрами больших токов.

Схема подключения измерительного трансформатора тока представлена на рис. 5.20.

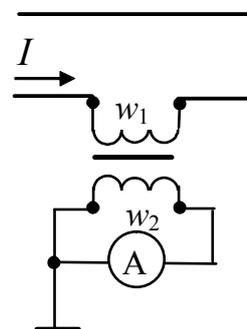


Рис. 5.20

Число витков вторичной обмотки трансформатора $w_2 > w_1$, но за счет режима короткого замыкания напряжение на вторичных зажимах близко к нулю. В случае отключения амперметра напряжение на выходе трансформатора значительно повышается, что может вызвать выход его из строя. Т.е. режим холостого хода для трансформатора тока является аварийным.

Реальные измерительные трансформаторы в рабочем режиме приближенно подчиняются полученным соотношениям для идеального трансформатора.

5.10. Схема замещения трансформатора.

В трансформаторе первичная и вторичная цепь связаны друг с другом только через магнитную связь. Идея создания схемы замещения трансформатора состоит в замене магнитных связей электрическими. Такая замена основывается на уравнениях трансформатора, если их преобразовать определенным образом.

Запишем уравнения трансформатора в таком виде:

$$\dot{U}_1 = R_1 \dot{I}_1 + j\omega L_1 \dot{I}_1 - j\omega M \dot{I}_2 + j\omega M \dot{I}_1 - j\omega M \dot{I}_1;$$

$$0 = R_2 \dot{I}_2 + j\omega L_2 \dot{I}_2 - j\omega M \dot{I}_1 + \underline{Z}_H \dot{I}_2 + j\omega M \dot{I}_2 - j\omega M \dot{I}_2.$$

Проведем группирование слагаемых, тогда имеем:

$$\dot{U}_1 = R_1 \dot{I}_1 + j\omega(L_1 - M) \dot{I}_1 + j\omega M(\dot{I}_1 - \dot{I}_2);$$

$$0 = R_2 \dot{I}_2 + j\omega(L_2 - M) \dot{I}_2 + \underline{Z}_H \dot{I}_2 - j\omega M(\dot{I}_1 - \dot{I}_2).$$

Полученным уравнениям отвечает следующая схема, которая называется двухконтурной схемой замещения трансформатора (рис. 5.21). У нее нет магнитных связей между индуктивными элементами.

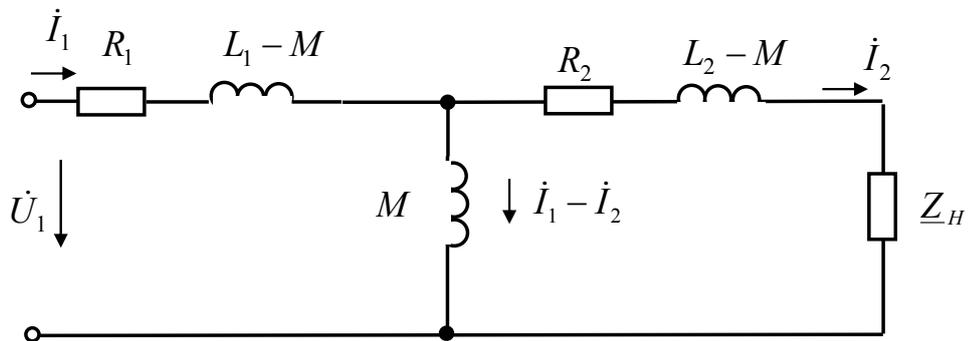


Рис. 5.21

Если $L_1 > M$ и $L_2 > M$, то физически реализовать такую схему замещения можно для любой частоты. Если для одной из индуктивностей разность $L - M < 0$, то на схеме замещения появляется емкость и физическая реализация схемы замещения возможна лишь на определенной частоте.

РАЗДЕЛ 6

ТРЕХФАЗНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

Лекция 12

План лекции:

Введение.

6.1. Основные понятия и определения.

6.2. Трехфазная система, соединенная по схеме «звезда-звезда».

6.3. Расчет трехфазной цепи, соединенной по схеме «звезда-звезда».

Введение.

Производство, передача и распределение электрической энергии между потребителями происходит при помощи трехфазных электрических цепей. Значительную часть потребителей электроэнергии представляют трехфазные системы. Такое широкое практическое использование трехфазных систем обусловлено следующими факторами:

1. Наиболее экономичная, с точки зрения стоимости проводов, передача энергии на значительные расстояния (необходимо всего три провода).

2. Независимость от времени суммарной мгновенной мощности симметричной трехфазной системы - это уравновешенная система минимальной фазности. При этом мощность от генератора в нагрузку передается равномерно на протяжении всего периода.

3. Простота создания вращающегося в пространстве магнитного поля, которое используется в простейшем и наиболее распространенном асинхронном двигателе.

4. Два уровня напряжений: линейное и фазное, что позволяет использовать без трансформаторов нагрузку, рассчитанную на разные напряжения.

6.1. Основные понятия и определения.

Многофазной системой называется совокупность электрических цепей, в которых действуют гармонические ЭДС одинаковой частоты, сдвинутые по фазе на одинаковый угол и создаваемые общим источником.

Каждая из электрических цепей, входящая в состав многофазной системы, называется фазой (не путать с начальной фазой гармонического колебания).

Совокупность ЭДС, которые действуют в многофазной системе, называется многофазной системой ЭДС.

Система многофазных ЭДС (токов, напряжений) называется симметричной, если амплитуды всех ЭДС одинаковы по величине, а начальные фазы отличаются на одинаковый угол.

Система электрических цепей (нагрузки) называется симметричной, если комплексные сопротивления отдельных фаз одинаковы.

Для получения трехфазной системы ЭДС используется трехфазный генератор.

На рис. 6.1 представлено схематическое изображение трехфазного генератора. Он состоит из неподвижной части - статора (заштрихованная зона) и подвижной части - ротора. Статор выполнен из трансформаторного железа, в пазах которого находятся три одинаковые обмотки, расположенные в пространстве под углом 120° друг к другу.

Начало первой обмотки обозначают буквой А, конец -х, второй - В-у, третьей - С-з.

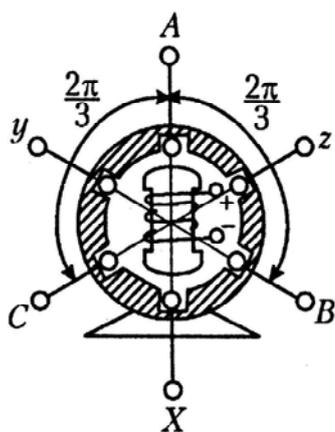


Рис. 6.1

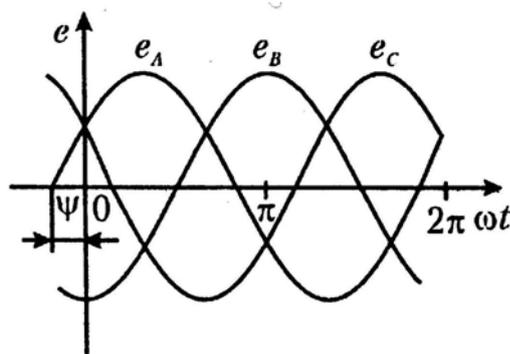


Рис. 6.2

Ротор генератора представляет собой электромагнит, расположенный на оси гидротурбины, паровой турбины и т.п. Ротор генератора вращается под действием внешних сил неэлектрической природы, чаще всего, механических.

При вращении магнита (ротора) в обмотках статора согласно закону электромагнитной индукции поочередно наводятся ЭДС. В силу того, что обмотки статора сдвинуты в пространстве на угол $\pm 120^\circ$, то и ЭДС обмоток будут сдвинуты по фазе на угол $\pm 120^\circ$.

На рис. 6.2 приведена временная диаграмма трехфазной системы ЭДС. Для мгновенных значений трехфазной симметричной системы ЭДС имеем:

$$e_A = E_m \sin(\omega t + \psi),$$

$$e_B = E_m \sin(\omega t + \psi - 120^\circ),$$

$$e_C = E_m \sin(\omega t + \psi + 120^\circ).$$

Как правило, начальную фазу ψ принимают равной нулю, тогда ЭДС фаз в комплексной форме можно записать:

$$\dot{E}_A = E e^{j0}, \dot{E}_B = E e^{-j120^\circ}, \dot{E}_C = E e^{j120^\circ}.$$

Для записи симметричной системы ЭДС используют так называемый оператор поворота $a = e^{j120^\circ} = -0,5 + j0,866$. Свойства оператора поворота:

$$a^2 = e^{j240^\circ} = -0,5 - j0,866; \quad a^3 = e^{j360^\circ} = e^{j0} = 1; \quad a + a^2 + a^3 = 0.$$

Оператор поворота a – это единичный вектор, модуль которого $|a| = 1$. На комплексной плоскости оператор поворота a и его степени a^2 и a^3 изображаются в виде симметричной системы единичных векторов (рис. 6.3). Необходимо подчеркнуть, что при рассмотрении трехфазных цепей комплексную плоскость принято поворачивать на угол 90° против часовой стрелки.

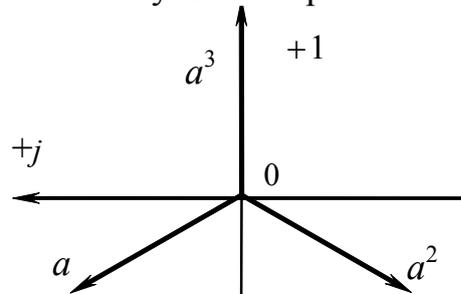


Рис. 6.3

ЭДС фаз В и С с использованием оператора поворота записываются таким образом: $\dot{E}_B = a^2 \dot{E}_A$, $\dot{E}_C = a \dot{E}_A$.

Векторная диаграмма симметричного трехфазного источника ЭДС представлена на рис. 6.4.

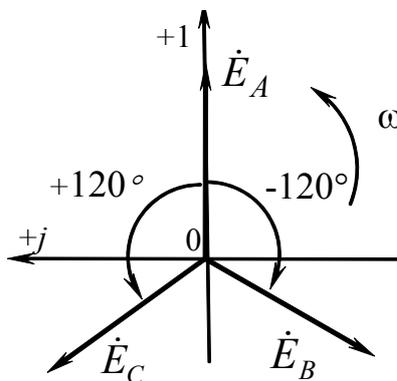


Рис. 6.4

Трехфазная система ЭДС называется связанной, если электрические цепи, которые образуют ее, имеют гальванические связи, и несвязанной - если не имеют.

На практике используются только связанные трехфазные системы. Связанную систему можно получить путем соединения концов обмоток генератора в один узел (соединение звездой) или последовательным соединением концов одних обмоток с началами следующих (соединение треугольником). Нагрузка, как и генератор, также может соединяться либо звездой (\star), либо треугольником (Δ). В зависимости от этого различают такие виды соединений: звезда-звезда, звезда-треугольник, треугольник - звезда и треугольник-треугольник.

6.2. Трехфазная система, соединенная по схеме «звезда-звезда».

На клеммную колодку генератора выходят шесть выводов: начала обмоток А, В, С и концы - X, Y, Z (рис. 6.5). Соединение источника звездой получают путем соединения концов обмоток X, Y, Z в одну точку, называемую нейтральной точкой источника. На клеммной колодке такое соединение выглядит так, как показано на рис. 6.5.

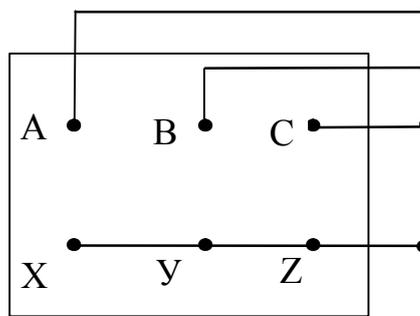


Рис. 6.5

Связанная трехфазная система может быть трехпроводной или четырехпроводной (с нулевым или нейтральным проводом). Схема трехфазной цепи с нулевым проводом представлена на рис. 6.6.

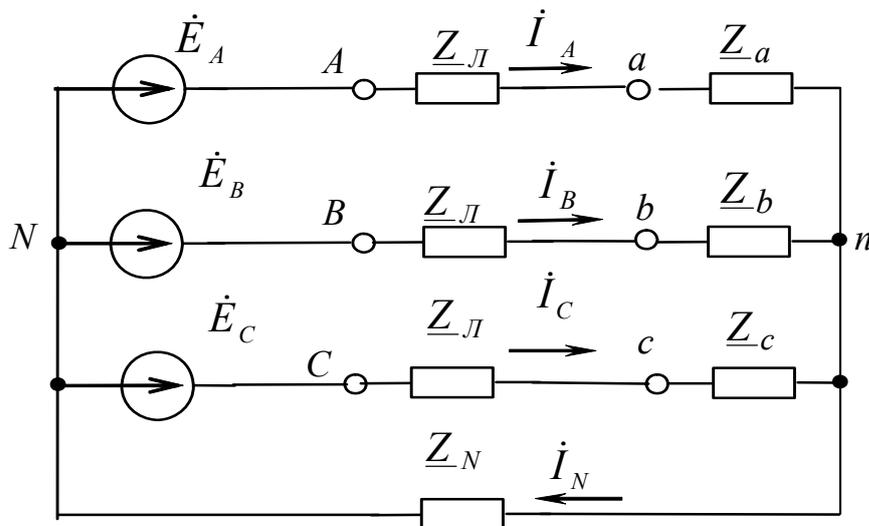


Рис. 6.6

Здесь N - нейтральная точка источника (генератора), n - нейтральная точка нагрузки. Провода $A-a$, $B-b$, $C-c$ – линейные провода. Z_L - сопротивление линейного провода. Токи в линейных проводах I_A , I_B , I_C - называются линейными токами. Токи в фазах источника или в фазах нагрузки называют фазными. В такой схеме фаза источника, линейный провод и фаза нагрузки соединены последовательно. Поэтому при соединении «звезда-звезда» линейные токи совпадают с фазными $I_L = I_\phi$, т.е. существует одна система токов.

Провод, который соединяет нейтральные точки источника и нагрузки называют нейтральным или нулевым проводом. Z_N - сопротивление нейтрального провода, I_N - ток в нейтральном проводе.

Напряжения $\dot{U}_{AN}, \dot{U}_{BN}, \dot{U}_{CN}$ - фазные напряжения источника, а напряжения $\dot{U}_{an}, \dot{U}_{bn}, \dot{U}_{cn}$ - фазные напряжения нагрузки. Напряжения между линейными проводами - $\dot{U}_{AB}, \dot{U}_{BC}, \dot{U}_{CA}$ - называются линейными напряжениями источника, напряжения $\dot{U}_{av}, \dot{U}_{bc}, \dot{U}_{ca}$ - линейными напряжениями нагрузки.

Напряжение между нейтральными точками нагрузки и источника \dot{U}_{nN} называется напряжением смещения нейтрали или «смещением нейтрали».

Из рассмотрения векторной диаграммы получим соотношения между фазными и линейными напряжениями симметричного источника (рис. 6.7). На векторных диаграммах трехфазных цепей напряжения принято направлять от второго индекса к первому, т.е. напряжение \dot{U}_{AB} направлено от точки B к точке A . Опустим перпендикуляр из точки N на вектор \dot{U}_{AB} и получим прямоугольный треугольник с углом 60° .

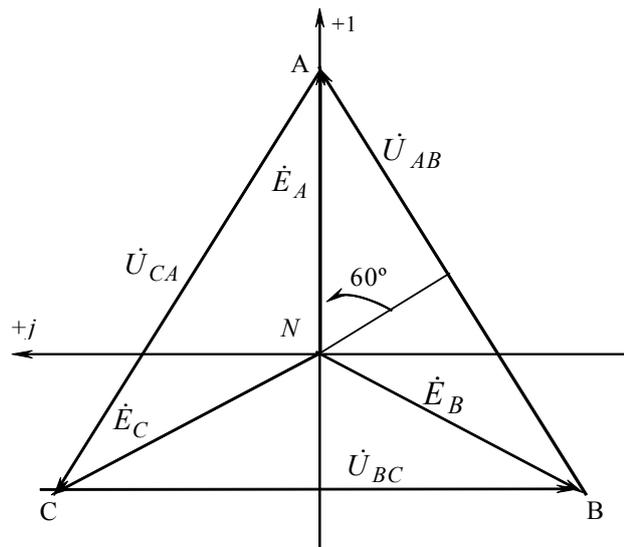


Рис. 6.7

Перпендикуляр делит отрезок AB пополам, поэтому

$$\sin 60^\circ = \frac{U_{AB}}{2E_A} = \frac{U_L}{2U_\phi} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Отсюда получаем соотношение между линейными и фазными напряжениями для симметричного трехфазного источника: $U_L = \sqrt{3}U_\phi$. На щитках электропитания часто можно увидеть надписи 380/220 или 220/127. Таким об-

разом отмечают линейное и фазное напряжение симметричного трехфазного источника.

6.3. Расчет трехфазной цепи, соединенной по схеме «звезда-звезда».

Постановка задачи: заданы ЭДС фаз симметричного источника и комплексные сопротивления электрической цепи. Необходимо рассчитать токи во всех ветвях цепи и напряжения на сопротивлениях нагрузки.

В общем случае расчет трехфазных цепей ничем не отличается от расчета цепей гармонического тока с тремя источниками.

Схема, которая изображена на рис. 6.6, имеет четыре ветви. Поэтому для расчета электрической цепи методом уравнений Кирхгофа необходимо решить систему из четырех уравнений: одно уравнение записывается по первому закону Кирхгофа и три - по второму.

Для расчета цепи методом контурных токов нужно решить систему трех уравнений (три контура), а методом узловых напряжений - только одно уравнение. Остановимся на последнем методе. Узел N обычно принимают за базисный. Тогда напряжение смещения нейтрали запишется в виде (см. метод узловых напряжений):

$$\dot{U}_{nN} = \frac{\underline{Y}_A \dot{E}_A + \underline{Y}_B \dot{E}_B + \underline{Y}_C \dot{E}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C + \underline{Y}_N}, \text{ где } \underline{Y}_A = \frac{1}{\underline{Z}_L + \underline{Z}_A};$$

$$\underline{Y}_B = \frac{1}{\underline{Z}_L + \underline{Z}_B}; \quad \underline{Y}_C = \frac{1}{\underline{Z}_L + \underline{Z}_C}; \quad \underline{Y}_N = \frac{1}{\underline{Z}_N}.$$

Запишем второй закон Кирхгофа для фазы А, замкнув ее напряжением \dot{U}_{nN} .

$$\dot{E}_A = (\underline{Z}_L + \underline{Z}_A) \dot{I}_A + \dot{U}_{nN}, \text{ отсюда } \dot{I}_A = \frac{\dot{E}_A - \dot{U}_{nN}}{\underline{Z}_L + \underline{Z}_A}.$$

$$\text{Аналогично } \dot{I}_B = \frac{\dot{E}_B - \dot{U}_{nN}}{\underline{Z}_L + \underline{Z}_B}; \quad \dot{I}_C = \frac{\dot{E}_C - \dot{U}_{nN}}{\underline{Z}_L + \underline{Z}_C}.$$

Ток в нейтральном проводе определим по первому закону Кирхгофа

$$\dot{I}_N = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C.$$

Напряжения в фазах нагрузки и линейных проводах определяют по закону Ома:

$$\dot{U}_A = \underline{Z}_A \dot{I}_A; \quad \dot{U}_B = \underline{Z}_B \dot{I}_B; \quad \dot{U}_C = \underline{Z}_C \dot{I}_C; \quad \dot{U}_L = \dot{I}_L \underline{Z}_L.$$

Построение векторной диаграммы трехфазной цепи при соединении «звезда-звезда» (рис. 6.8) начинают с симметричной системы ЭДС.

1. Выбираем масштабы $m_U = \dots B / \text{см}$, $m_I = \dots A / \text{см}$ и в масштабе откладываем фазные ЭДС $\dot{E}_A, \dot{E}_B, \dot{E}_C$ симметричного источника. Для определенности зададимся типом нагрузки и сопротивлением линейного провода:

$$\underline{Z}_L = 0, \quad \underline{Z}_A = R, \quad \underline{Z}_B = jX_L, \quad \underline{Z}_C = -jX_C.$$

2. Откладываем напряжение смещения нейтрали \dot{U}_{nN} и получаем нейтральную точку нагрузки n .

3. Соединяем точку n с точками A, B, C и получаем фазные напряжения нагрузки $\dot{U}_A, \dot{U}_B, \dot{U}_C$.

4. Относительно фазных напряжений нагрузки откладываем токи в фазах $\dot{I}_A, \dot{I}_B, \dot{I}_C$ с учетом типа сопротивлений нагрузки фаз.

5. Суммируя токи $\dot{I}_A, \dot{I}_B, \dot{I}_C$, получаем ток в нейтральном проводе \dot{I}_N .

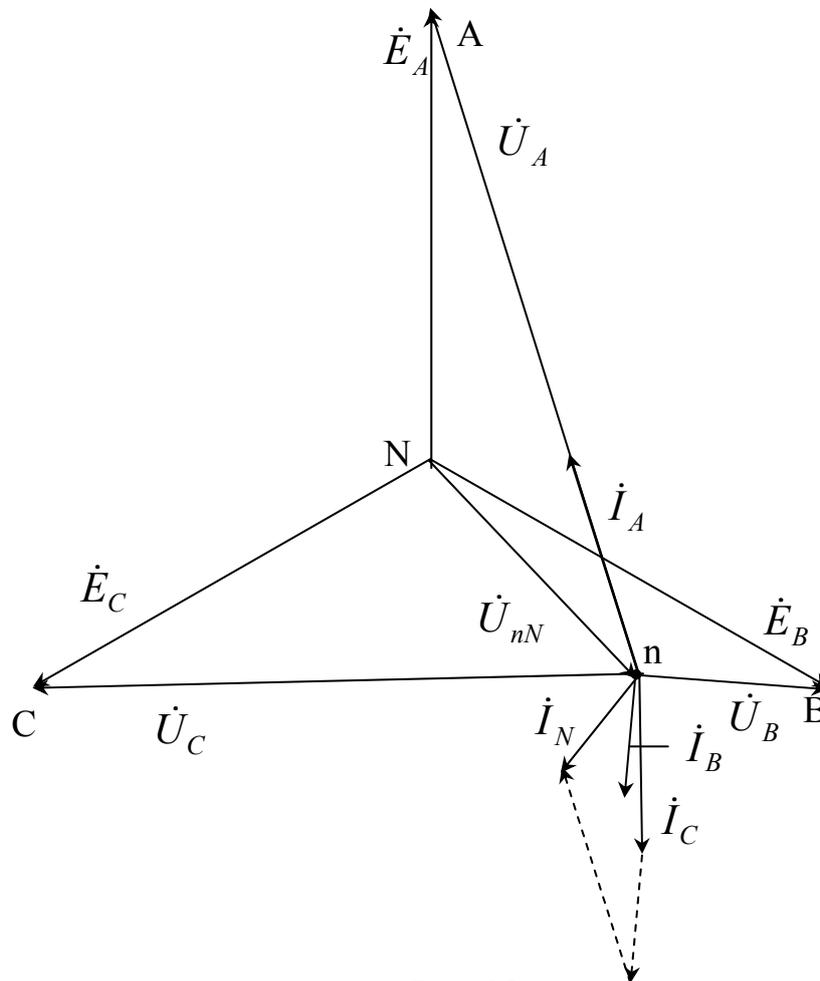


Рис. 6.8

Необходимо обратить внимание на то, что появление напряжения смещения нейтрали приводит к «перекосу фаз», т.е. резкой несимметрии напряжений в фазах нагрузки. В фазах A и C напряжение значительно выросло, а в фазе B - уменьшилось. Это может привести к выходу из строя электрооборудования, подключенного к фазам A и C , и плохой работе (при пониженном напряжении) оборудования в фазе B .

При питании жилых домов такой режим допускать нельзя. Во избежание появления напряжения смещения нейтрали нейтральные точки N и n должны быть надежно соединены проводом с минимальным сопротивлением.

Лекция 13

План лекции:

- 6.4. Трехфазная цепь, соединенная по схеме «треугольник - треугольник».
- 6.5. Аварийные режимы трехфазной цепи, нагрузка которой соединена звездой.

6.4. Трехфазная цепь, соединенная по схеме «треугольник – треугольник».

Соединение источника треугольником получают путем соединения конца предыдущей фазы с началом следующей. На клеммной колодке такое соединение выглядит, как показано на рис. 6.9.

При соединении трехфазной цепи треугольником (рис. 6.10) линейные и фазные напряжения совпадают, т.е. $U_L = U_\phi$, а линейные и фазные токи отличаются друг от друга. Таким образом, имеем две системы токов: линейную и фазную, и одну систему напряжений. В симметричной трехфазной цепи, соединенной по схеме «треугольник-треугольник»,

$$I_L = \sqrt{3}I_\phi, \quad U_L = U_\phi.$$

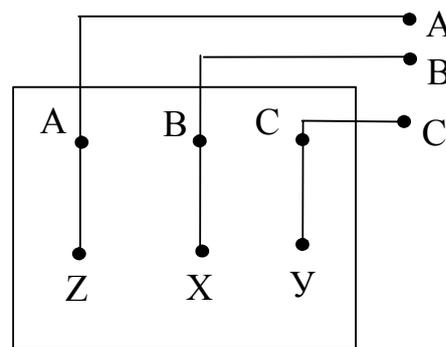


Рис. 6.9

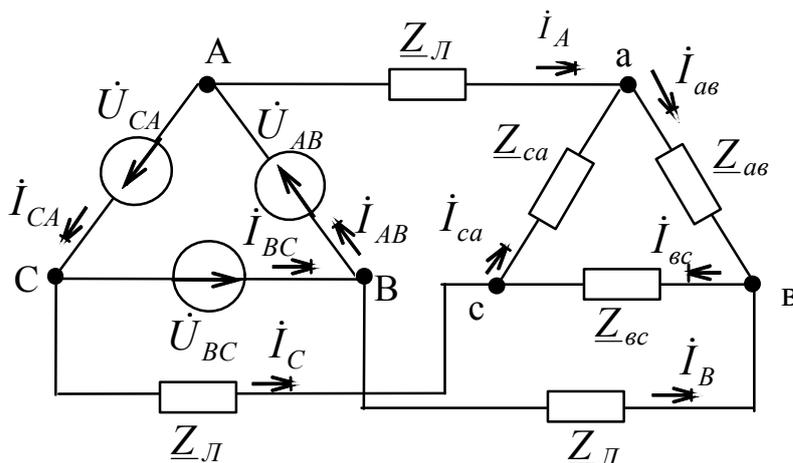


Рис. 6.10

Для расчета трехфазной цепи, в которой нагрузка соединена треугольником, совсем не важно, по какой схеме соединен симметричный трехфазный источник. Поэтому схему соединения обмоток генератора обычно не указывают, и расчетная схема выглядит, как показано на рис. 6.11.

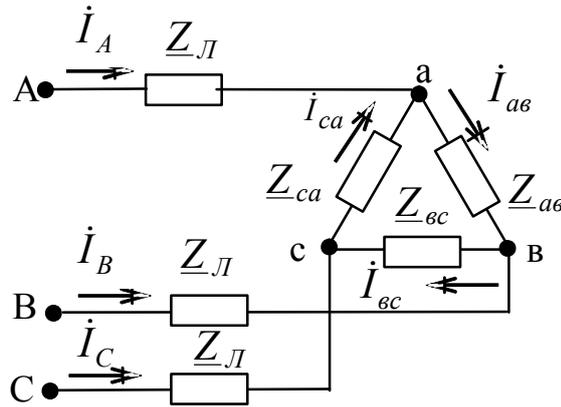


Рис. 6.11

Для расчета такой цепи треугольник сопротивлений нагрузки преобразуют в эквивалентное соединение звездой. Рассчитывают цепь «звезда-звезда», а затем, зная линейные токи $\dot{I}_A, \dot{I}_B, \dot{I}_C$ и линейные напряжения $\dot{U}_{ав}, \dot{U}_{вс}, \dot{U}_{са}$, рассчитывают фазные токи нагрузки.

Построим векторную диаграмму (рис. 6.12) несимметричной трехфазной цепи, соединенной по схеме треугольника для случая, когда $Z_L = 0$.

1. Откладываем симметричную систему напряжений источника, которая совпадает с системой фазных напряжений нагрузки, так как

$$\dot{U}_{AB} = \dot{U}_{ав}, \quad \dot{U}_{BC} = \dot{U}_{вс}, \quad \dot{U}_{CA} = \dot{U}_{са}.$$

2. Относительно фазных напряжений откладываем фазные токи $\dot{I}_{ав}, \dot{I}_{вс}, \dot{I}_{са}$.

3. На основании первого закона Кирхгофа получаем линейные токи и строим их как разность фазных токов:

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{ав} - \dot{I}_{са}, \quad \dot{I}_B = \dot{I}_{вс} - \dot{I}_{ав}, \quad \dot{I}_C = \dot{I}_{са} - \dot{I}_{вс}.$$

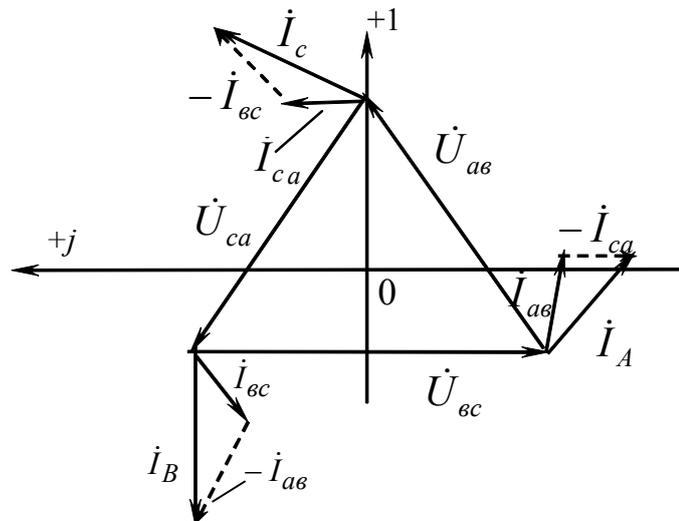


Рис. 6.12

Если в схеме есть сопротивления линии и нагрузка несимметрична, то после построения симметричной системы напряжений источника откладывают

напряжения в фазах линий $\dot{U}_{Aa}, \dot{U}_{Bb}, \dot{U}_{Cc}$ и, соединив точки а, в, с, получают фазные напряжения нагрузки. Далее диаграмма строится аналогично рассмотренной выше схемы.

6.5. Аварийные режимы трехфазной цепи, нагрузка которой соединена звездой.

6.5.1. Короткое замыкание одной из фаз симметричной нагрузки.

Предположим, что в трехфазном двигателе произошло замыкание витков в одной из обмоток, например в фазе А (рис. 6.13)

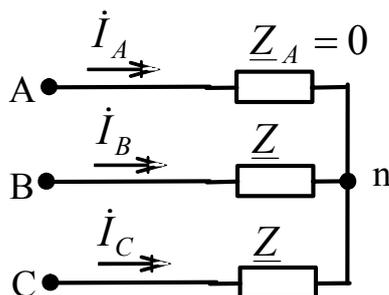


Рис. 6.13

В силу того, что $\underline{Y}_A = \frac{1}{\underline{Z}_A} = \infty$, рассчитать напряжение смещения нейтрали по формуле для двух узлов невозможно.

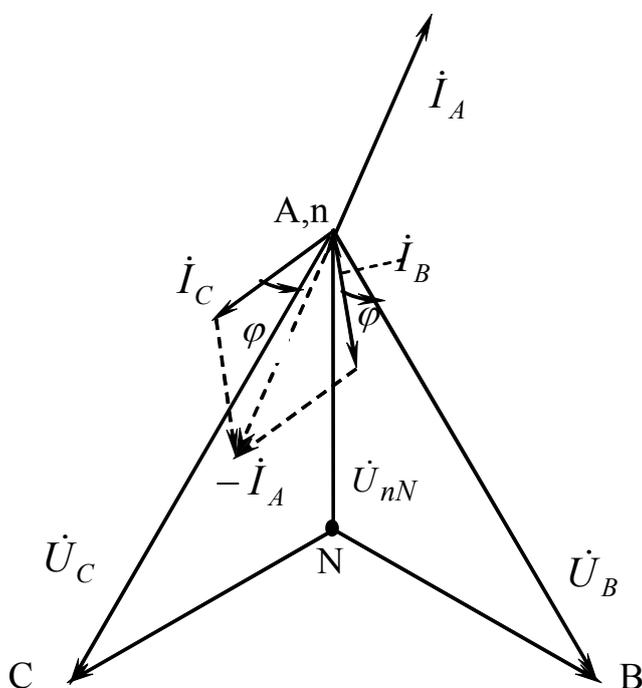


Рис. 6.14

Очевидно, что $\dot{U}_{nA} = 0$, т.е. точки n и A совпали. Если построить векторную диаграмму для данного случая (рис. 6.14), то видно, что при замыкании

фазы A напряжение в двух других фазах увеличится в $\sqrt{3}$ раз, например с 220 В до 380 В. Тогда обмотки фаз B и C могут сгореть из-за перегрузки. Если принять, что сопротивления нагрузки имеют индуктивный характер $\underline{Z} = R + jX_L$, то на векторной диаграмме токи в фазах отстают от соответствующих напряжений на некоторый угол φ .

$$\underline{\dot{I}}_B = \frac{\underline{\dot{U}}_B}{\underline{Z}}; \quad \underline{\dot{I}}_C = \frac{\underline{\dot{U}}_C}{\underline{Z}}; \quad \underline{\dot{I}}_A = -(\underline{\dot{I}}_B + \underline{\dot{I}}_C) .$$

6.5.2. Обрыв одной из фаз симметричной трехфазной нагрузки.

На рис. 6.15 приведена схема с обрывом фазы A .

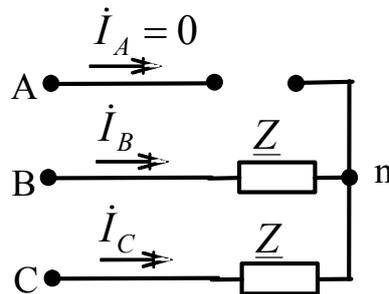


Рис. 6.15. Обрыв фазы A симметричной нагрузки

Сопротивление $\underline{Z}_B = \underline{Z}_C = \underline{Z}$, поэтому

$$\underline{\dot{U}}_{nN} = \frac{\underline{\dot{E}}_B \underline{Y}_B + \underline{\dot{E}}_C \underline{Y}_C}{\underline{Y}_B + \underline{Y}_C} = \frac{\underline{Y}_\phi (\underline{\dot{E}}_B + \underline{\dot{E}}_C)}{2\underline{Y}_\phi} = -\frac{\underline{\dot{E}}_A}{2} .$$

На рис. 6.16 приведена векторная диаграмма, которая соответствует этому случаю. Из диаграммы видно, что напряжение в фазе A :

$$U_{An} = E_A + \frac{E_A}{2} = \frac{3}{2} E_A .$$

Например, если $E_A = 220 \text{ В}$, то $U_{An} = 330 \text{ В}$.

Но если в фазе A обрыв, то такое напряжение не приводит к аварии.

$$\underline{\dot{U}}_{Bn} = \underline{\dot{E}}_B - \underline{\dot{U}}_{nN} = \underline{\dot{E}}_B + \frac{\underline{\dot{E}}_A}{2} = \frac{1}{2} \underline{\dot{U}}_{BC}; \quad \underline{\dot{I}}_B = \frac{0,5 \underline{\dot{U}}_{BC}}{\underline{Z}};$$

$$\underline{\dot{U}}_{Cn} = \underline{\dot{E}}_C - \underline{\dot{U}}_{nN} = \underline{\dot{E}}_C + \frac{\underline{\dot{E}}_A}{2} = \frac{1}{2} \underline{\dot{U}}_{CB}; \quad \underline{\dot{I}}_C = \frac{0,5 \underline{\dot{U}}_{CB}}{\underline{Z}} .$$

Из диаграммы видно, что напряжение в неповрежденных фазах уменьшилось в $\frac{\sqrt{3}}{2}$ раз.

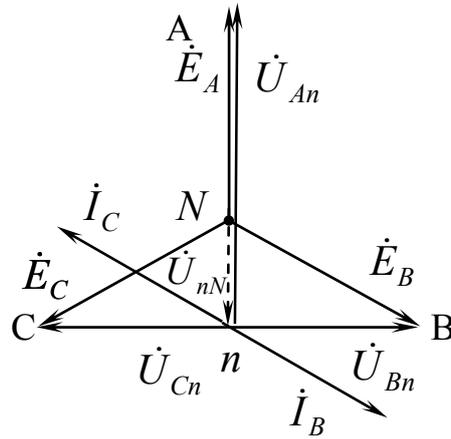


Рис. 6.16

6.5.3. Обрыв нейтрального провода в случае несимметричной трехфазной нагрузки.

По своим результатам аварийный режим, связанный с обрывом нейтрального провода при несимметричной трехфазной нагрузке, несет большую угрозу для потребителей электрической энергии, особенно тех, которые не имеют защиты от превышения напряжения в электросети. Такой аварийный режим представлен на схеме рис. 6.17.

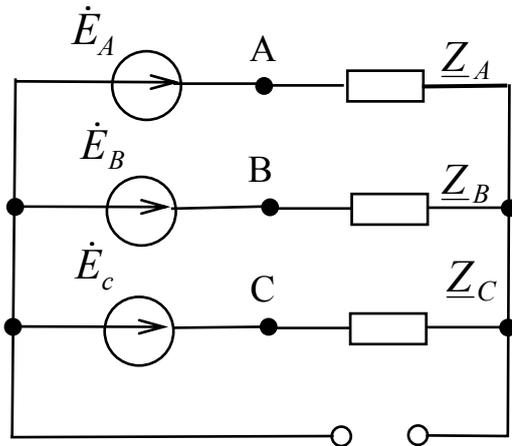


Рис. 6.17

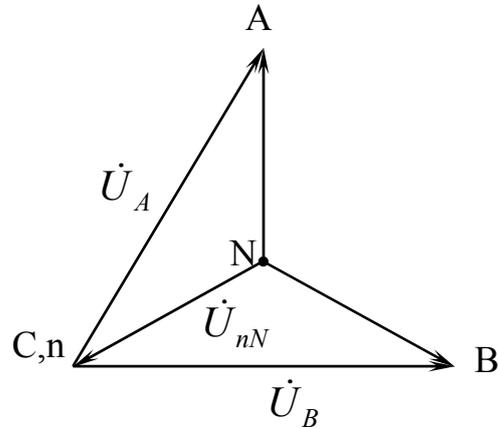


Рис. 6.18

Допустим, потребителем электрической энергии с линейным напряжением $U_{Л} = 380$ В есть многоквартирный дом, каждая квартира которого питается от одной из фаз и нейтрального провода. Предположим, что нагрузка носит активный характер, а мощность потребителей в фазе C значительно превышает мощности, которые потребляются в фазах A и B . Например, в фазах A и B включены блоки питания радиотелефонов, телевизоров в режиме ожидания и тому подобное, а в фазе C – электрический чайник и утюг, общей мощностью более 3 кВт, т.е. сопротивление Z_C значительно меньше сопротивлений Z_A и Z_B . В таком случае в выражении для напряжения смещения нейтрали слагаемыми, которые содержат проводимости Y_A и Y_B можно пренебречь по срав-

нению со слагаемым, которое содержит \underline{Y}_C . Смещение нейтрали будет равно напряжению в фазе C , то есть точка n перемещается в точку C (рис. 6.18).

$$\dot{U}_{nN} = \frac{\underline{Y}_A \dot{E}_A + \underline{Y}_B \dot{E}_B + \underline{Y}_C \dot{E}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C} \approx \dot{E}_C.$$

Таким образом, напряжения в фазах A и B увеличатся почти до линейного напряжения 380 В. Потребители, которые были рассчитаны на напряжение 220 В, могут не выдержать нагрузки, загореться, что может привести к пожару. Для предотвращения таких аварий на входе в квартиру можно установить реле напряжения, которое отключает питание квартиры, если напряжение в сети превышает максимально допустимые 250 В.

Лекция 14

План лекции:

- 6.6. Симметричные системы ЭДС, напряжений, токов.
- 6.7. Разложение несимметричной системы ЭДС, напряжений или токов на симметричные составляющие.
- 6.8. Мощность в трехфазных цепях.
- 6.9. Вращающееся магнитное поле.

6.6. Симметричные системы ЭДС, напряжений, токов.

Трехфазная система источника называется симметричной, если ЭДС отдельных фаз одинаковы по величине, а каждая последующая ЭДС отстает от предыдущей по фазе на одинаковый угол $q \frac{2\pi}{3}$, где $q = 1, 2, 3, \dots$

Порядок, при котором ЭДС фаз достигают своего положительного максимума, называют **порядком чередования фаз** или **последовательностью чередования фаз**. Вращение векторов на комплексной плоскости принято против часовой стрелки.

Если $q = 1, 4, 7, \dots$, то каждая последующая ЭДС отстает от предыдущей на угол $\frac{2\pi}{3}$ (120°) и ЭДС фаз записываются в виде:

$$\dot{E}_A = E e^{j\psi}, \quad \dot{E}_B = a^2 \dot{E}_A, \quad \dot{E}_C = a \dot{E}_A.$$

Порядок следования фаз – ABC , приведенный на рис. 6.19, называется **прямым порядком чередования фаз** или **прямой последовательностью**.

Если $q = 2, 5, 8, \dots$, то каждая последующая ЭДС отстает по фазе от предыдущей на угол $\frac{4\pi}{3} = 240^\circ$ и ЭДС фаз записываются в виде:

$$\dot{E}_A = E e^{j\psi}, \quad \dot{E}_B = a \dot{E}_A, \quad \dot{E}_C = a^2 \dot{E}_A.$$

Векторная диаграмма для этого случая имеет вид, представленный на рис. 6.20. Порядок следования фаз ACB называется **обратным порядком чередования фаз (обратной последовательностью)**.

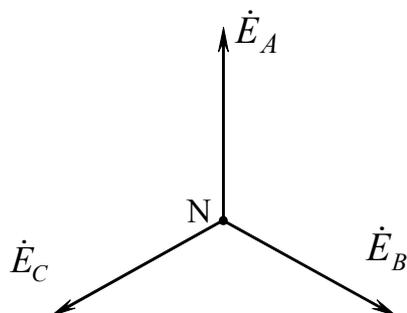


Рис. 6.19

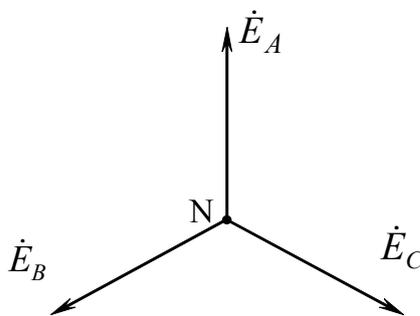


Рис. 6.20

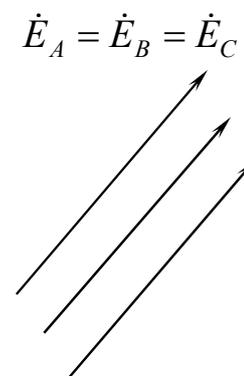


Рис. 6.21

Если $q = 3, 6, 9, \dots$, то каждая последующая ЭДС отстает от предыдущей по фазе на угол $3 \cdot \frac{2\pi}{3} = 360^\circ$, т.е. $\dot{E}_A = \dot{E}_B = \dot{E}_C = \dot{E}$. Векторная диаграмма для этого случая представлена на рис. 6.21. Это **нулевой порядок чередования фаз** или **нулевая последовательность**. Для прямого и обратного порядка чередования фаз $\dot{E}_A + \dot{E}_B + \dot{E}_C = 0$. Для нулевого $\dot{E}_A + \dot{E}_B + \dot{E}_C = 3\dot{E}$.

6.7. Разложение несимметричной системы ЭДС, напряжений или токов на симметричные составляющие.

Вопрос несимметрии трехфазных систем имеет большое практическое значение, так как степень несимметрии трехфазного напряжения - один из важнейших показателей качества электроэнергии, который регламентируется и контролируется национальной комиссией по вопросам регулирования электроэнергетики Украины.

Основные причины несимметрии в трехфазных цепях - это условия работы трехфазных генераторов электрической энергии, а также присутствие в системе мощных однофазных потребителей.

Представление несимметричной трехфазной системы через симметричные составляющие лежит в основе расчетного метода, который называется методом симметричных составляющих. Чаще всего он используется при анализе несимметричных режимов энергетических устройств со взаимными индуктивностями между отдельными фазами электрических машин, линий электропередачи и трансформаторов с динамической нагрузкой.

Любую несимметричную систему ЭДС, токов или напряжений можно представить совокупностью трех симметричных трехфазных систем прямой, обратной и нулевой последовательности (рис. 6.22).

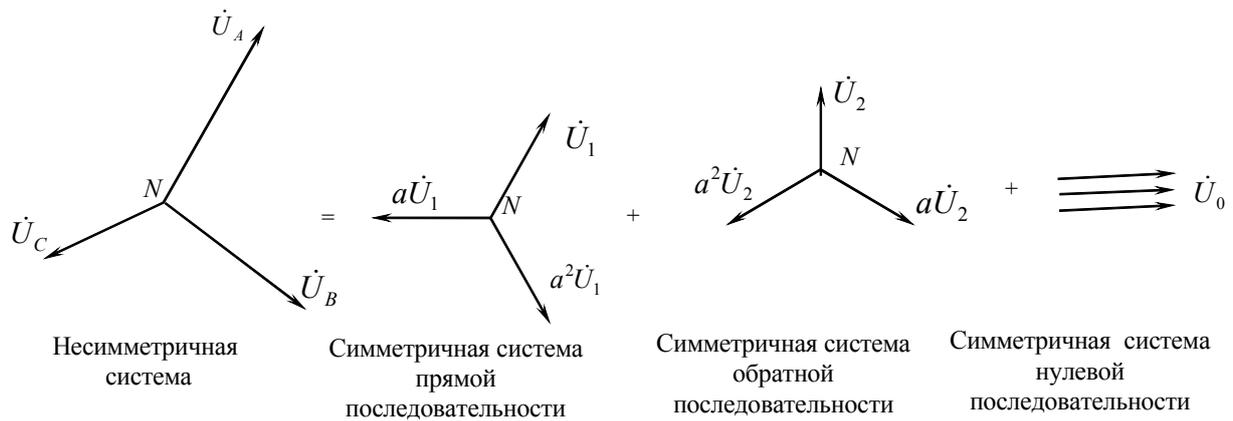


Рис. 6.22. Разложение несимметричной системы на симметричные составляющие

Предположим, что напряжения в фазах несимметричной системы представлены в виде суммы напряжений симметричных систем нулевой, прямой и обратной последовательности:

$$\dot{U}_A = \dot{U}_0 + \dot{U}_1 + \dot{U}_2 \quad (6.1)$$

$$\dot{U}_B = \dot{U}_0 + a^2 \dot{U}_1 + a \dot{U}_2 \quad (6.2)$$

$$\dot{U}_C = \dot{U}_0 + a \dot{U}_1 + a^2 \dot{U}_2 \quad (6.3)$$

Для нахождения симметричных составляющих нулевой последовательности сложим уравнения 6.1 – 6.3 и учтем, что сумма симметричных систем прямой и обратной последовательности равняется нулю. Тогда

$$\dot{U}_A + \dot{U}_B + \dot{U}_C = 3\dot{U}_0, \text{ откуда } \dot{U}_0 = \frac{1}{3}(\dot{U}_A + \dot{U}_B + \dot{U}_C).$$

Далее умножим уравнение (6.2) на $a = e^{j120^\circ}$, а (6.3) - на a^2 и сложим все уравнения. Откуда

$$\dot{U}_1 = \frac{1}{3}(\dot{U}_A + a\dot{U}_B + a^2\dot{U}_C).$$

Теперь уравнение (6.2) умножим на a^2 , а (6.3) - на a и снова сложим их. Тогда

$$\dot{U}_2 = \frac{1}{3}(\dot{U}_A + a^2\dot{U}_B + a\dot{U}_C).$$

Таким образом, мы показали, что любую несимметричную систему легко разложить на сумму трех симметричных составляющих. Разложение на симметричные составляющие - это фактически использование метода наложения, который позволяет свести расчет сложной трехфазной цепи с несимметричным источником к расчету трех более простых симметричных систем.

Каждая из симметричных систем рассчитывается «на одну фазу».

6.8. Мощность в трехфазных цепях.

Комплексная мощность, потребляемая трехфазной нагрузкой, равняется сумме мощностей отдельных фаз

$$\tilde{S} = \dot{U}_A I_A^* + \dot{U}_B I_B^* + \dot{U}_C I_C^* = P + jQ,$$

где

$$P = U_A I_A \cos \varphi_A + U_B I_B \cos \varphi_B + U_C I_C \cos \varphi_C,$$

$$Q = U_A I_A \sin \varphi_A + U_B I_B \sin \varphi_B + U_C I_C \sin \varphi_C.$$

Реактивная мощность индуктивной нагрузки - положительная, емкостной - отрицательная.

В симметричной трехфазной цепи

$$S = 3U_\phi I_\phi, \quad P = 3U_\phi I_\phi \cos \varphi, \quad Q = 3U_\phi I_\phi \sin \varphi.$$

В силу того, что при соединении нагрузки звездой $I_L = I_\phi$, $U_L = \sqrt{3}U_\phi$, а при соединении треугольником $U_L = U_\phi$, $I_L = \sqrt{3}I_\phi$, то для симметричной трехфазной нагрузки можно записать:

$$S = \sqrt{3}U_L I_L, \quad P = \sqrt{3}U_L I_L \cos \varphi, \quad Q = \sqrt{3}U_L I_L \sin \varphi.$$

Активная мощность каждой фазы симметричной трехфазной цепи одинакова, поэтому для ее измерения достаточно одного ваттметра. Тогда активная мощность всей цепи $P = 3P_W$.

Для четырехпроводной симметричной трехфазной цепи схема включения ваттметра представлена на рис. 6.23, а для трехпроводной - на рис. 6.24 (схема с искусственной нулевой точкой), где \underline{Z} - сопротивление, которое равняется комплексному сопротивлению обмотки напряжения ваттметра.

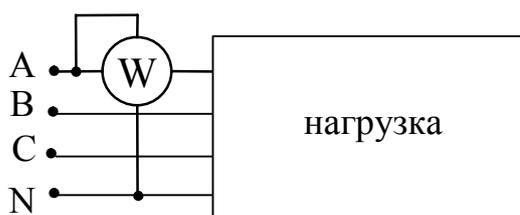


Рис. 6.23

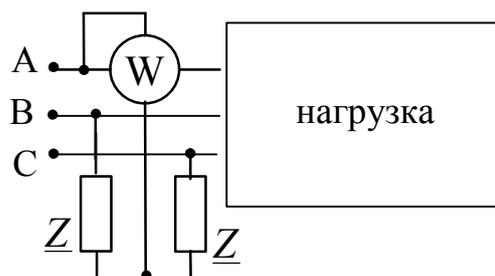


Рис. 6.24

Для измерения активной мощности несимметричной трехфазной нагрузки в четырехпроводной системе необходимо три ваттметра (рис. 6.25), а в трехпроводной без нейтрального провода - два ваттметра (рис. 6.26).

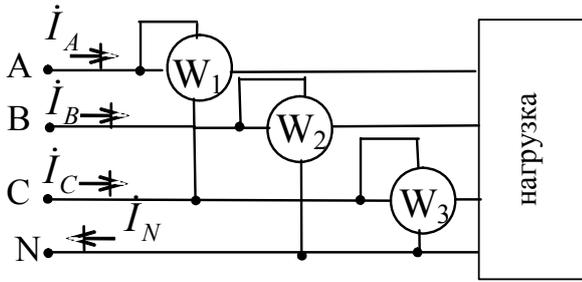


Рис. 6.25

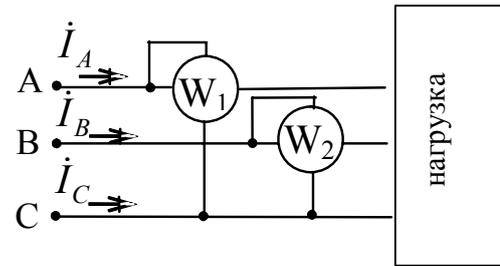


Рис. 6.26. Схема Арона

В первом случае активная мощность трехфазной нагрузки определяется как сумма показаний трех ваттметров. Во втором случае при измерении мощности по схеме Арона первый ваттметр показывает мощность

$$P_{W1} = \operatorname{Re} \left[\dot{U}_{AC} I_A^* \right], \text{ а второй } P_{W2} = \operatorname{Re} \left[\dot{U}_{BC} I_B^* \right].$$

Сумма этих показаний дает активную мощность, потребляемую трехфазной нагрузкой.

$$P = P_{W1} + P_{W2} = \operatorname{Re} \left[\dot{U}_{AC} I_A^* + \dot{U}_{BC} I_B^* \right] = \operatorname{Re} \tilde{S}.$$

Чтобы доказать это, рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} \dot{U}_{AC} I_A^* + \dot{U}_{BC} I_B^* &= (\dot{U}_A - \dot{U}_C) I_A^* + (\dot{U}_B - \dot{U}_C) I_B^* = \dot{U}_A I_A^* - \dot{U}_C I_A^* + \\ &+ \dot{U}_B I_B^* - \dot{U}_C I_B^* = \dot{U}_A I_A^* + \dot{U}_B I_B^* - \dot{U}_C (I_A^* + I_B^*) = \\ &= \dot{U}_A I_A^* + \dot{U}_B I_B^* + \dot{U}_C I_C^* = \tilde{S}. \end{aligned}$$

Таким образом, рассмотренная сумма дает полную комплексную мощность, потребляемую нагрузкой.

6.9. Вращающееся магнитное поле.

Одним из преимуществ многофазной системы есть способность создавать вращающееся магнитное поле. Использование такого поля лежит в основе принципа действия наиболее простых и распространенных электродвигателей переменного тока (асинхронных двигателей).

Вращающимся магнитным полем называется поле, вектор результирующей магнитной индукции которого не изменяется по величине и вращается с постоянной угловой скоростью в пространстве.

Для создания вращающегося магнитного поля нужен одновременный сдвиг нескольких магнитных полей во времени и в пространстве. Принцип получения вращающегося магнитного поля рассмотрим на примере двухфазной системы.

Пусть имеются две одинаковые катушки, которые расположены в пространстве под углом 90° (рис. 6.27) и питаются токами одинаковой амплитуды, но сдвинутыми по фазе на угол 90° .

$$i_1(t) = I_m \sin \omega t, \quad i_2(t) = I_m \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) = I_m \cos \omega t.$$

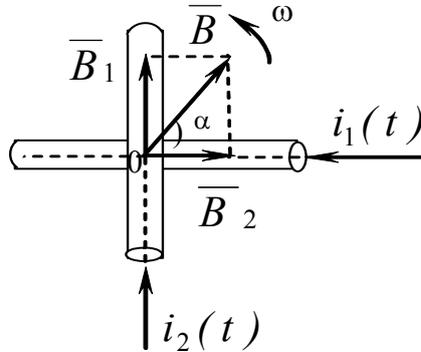


Рис. 6.27

Токам i_1 и i_2 отвечают магнитные потоки с индукциями $B_1 = B_m \sin \omega t$ и $B_2 = B_m \cos \omega t$, направление которых определяется по правилу правого винта.

Величину вектора суммарной магнитной индукции $\bar{B} = \bar{B}_1 + \bar{B}_2$, можно определить из прямоугольного треугольника

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} = \sqrt{B_m^2 \sin^2 \omega t + B_m^2 \cos^2 \omega t} = B_m.$$

Угол, который образует вектор результирующей магнитной индукции с горизонтальной осью, определяется из выражения:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{B_1}{B_2} = \frac{B_m \sin \omega t}{B_m \cos \omega t} = \operatorname{tg} \omega t, \quad \text{откуда } \alpha = \omega t.$$

Таким образом, мы получили магнитное поле, вектор результирующей магнитной индукции которого неизменный по величине и вращается в пространстве с постоянной угловой скоростью ω , т.е. вращающееся магнитное поле.

Если один из токов в катушках направить в противоположную сторону, то направление вращения магнитного поля изменится на противоположное.

В трехфазных асинхронных двигателях статор имеет три одинаковые обмотки (рис. 6.28), расположенные в пространстве под углами $\pm 120^\circ$ по отношению друг к другу, которые питаются симметричной трехфазной системой токов:

$$i_A = I_m \sin \omega t,$$

$$i_B = I_m \sin(\omega t - 120^\circ),$$

$$i_C = I_m \sin(\omega t + 120^\circ).$$

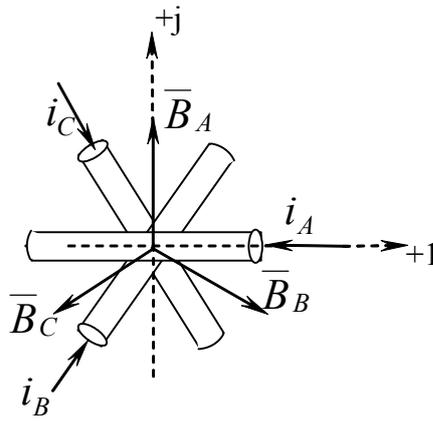


Рис. 6.28

При пропорциональной зависимости индукций от токов мгновенные значения индукций фаз также создают симметричную систему:

$$B_A(t) = B_m \sin \omega t,$$

$$B_B(t) = B_m \sin(\omega t - 120^\circ),$$

$$B_C(t) = B_m \sin(\omega t + 120^\circ).$$

Учитывая пространственное расположение всех трех обмоток в статоре, для магнитных индукций фаз имеем:

$$B_A(\alpha, t) = B_A(t) \cos \alpha,$$

$$B_B(\alpha, t) = B_B(t) \cos(\alpha + 120^\circ),$$

$$B_C(\alpha, t) = B_C(t) \cos(\alpha - 120^\circ),$$

где угол α определяет пространственное положение вектора магнитной индукции в воздушном зазоре статора при отсчете его против движения часовой стрелки относительно оси обмотки фазы А.

Используя принцип наложения, для суммарного значения индукции магнитного поля получим:

$$\begin{aligned} B(\alpha, t) &= B_A + B_B + B_C = B_m \sin \omega t \cos \alpha + B_m \sin(\omega t - 120^\circ) \cos(\alpha + 120^\circ) + \\ &+ B_m \sin(\omega t + 120^\circ) \cos(\alpha - 120^\circ) = 0,5B_m [\sin(\omega t + \alpha) + \sin(\omega t - \alpha) + \sin(\omega t + \alpha) + \\ &+ \sin(\omega t - \alpha - 240^\circ) + \sin(\omega t + \alpha) + \sin(\omega t - \alpha + 240^\circ)] = 1,5B_m \sin(\omega t + \alpha). \end{aligned}$$

Таким образом, в трехфазном двигателе величина результирующей магнитной индукции в 1,5 раза превышает амплитуды индукций в фазах. По сравнению с двухфазной системой имеет место выигрыш в 1,5 раза.

При питании двигателя токами прямой последовательности вращение ротора происходит по часовой стрелке, при питании токами обратной последовательности - против часовой стрелки.

РАЗДЕЛ 7

ТЕОРИЯ ПАССИВНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ПРОХОДНЫХ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ

Лекция 15

План лекции:

- 7.1. Общие понятия и определения.
- 7.2. Формы записи уравнений четырехполюсника. Матрицы четырехполюсника.
- 7.3. Соединения четырехполюсников.

7.1. Общие понятия и определения.

Цепь, рассматриваемая относительно четырех зажимов и определяемая матрицей второго порядка, называется **четыреполюсником**. Примеры четырехполюсников: линия электропередачи, двухобмоточный трансформатор, транзистор с общим эмиттером, базой или коллектором и т.п.

На схеме четырехполюсник изображается в виде прямоугольника с четырьмя выводами (рис. 7.1).

Принятые положительные направления напряжений и токов четырехполюсника указаны на схеме.

Зажимы 1-1', к которым подключается питание, называются входными или первичными, а зажимы 2-2', к которым подключается нагрузка, – выходными или вторичными.

Четыреполюсники делятся на активные и пассивные, линейные и нелинейные, обратимые и необратимые, проходные и непроходные.

Пассивными называются четырехполюсники, которые не имеют напряжений между любой парой зажимов.

Соответственно, активные четырехполюсники имеют напряжение на своих зажимах.

Линейные четырехполюсники состоят лишь из линейных элементов.

Обратимыми называются четырехполюсники, которые отвечают принципу взаимности. Пассивные линейные четырехполюсники все обратимые. Необратимые четырехполюсники не отвечают принципу взаимности. Пример необратимого четырехполюсника - транзистор. Проходные четырехполюсники имеют входные и выходные зажимы.

Сущность теории четырехполюсников заключается в том, что, не проводя расчета внутренней схемы четырехполюсника, которая может содержать сотни ветвей, узлов и контуров, по некоторым обобщенным параметрам можно записать соотношения, связывающие входные и выходные токи и напряжения четырехполюсника. Эти соотношения называются **уравнениями четырехполюсника**.

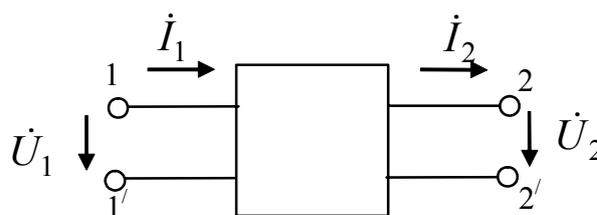


Рис. 7.1

Такие уравнения значительно проще полной системы уравнений цепи, в которую входят, кроме внешних токов и напряжений, токи и напряжения внутренней схемы четырехполюсника.

Соотношения между двумя входными и двумя выходными величинами полностью определяются матрицей четырехполюсника, причем какие-либо две величины можно считать заданными, а две другие - такими, которые необходимо рассчитать. Число возможных комбинаций определяется как

$$C_4^2 = \frac{4!}{2!2!} = 6.$$

Этим шести комбинациям отвечают шесть форм записи уравнений четырехполюсника.

7.2. Формы записи уравнений четырехполюсника.

Матрицы четырехполюсника.

Ограничимся рассмотрением линейных пассивных проходных четырехполюсников. Активный четырехполюсник всегда можно заменить эквивалентным пассивным четырехполюсником и вынесенным за его границы источником ЭДС.

Существуют 6 форм записи уравнений четырехполюсника, которые можно свести в следующую табл. 7.1.

Таблица 7.1

| <i>Форма (матрица)</i> | <i>Вычислить</i> | <i>Дано</i> |
|------------------------------|------------------------|------------------------|
| <i>Y</i> | \dot{I}_1, \dot{I}_2 | \dot{U}_1, \dot{U}_2 |
| <i>Z, или Y⁻¹</i> | \dot{U}_1, \dot{U}_2 | \dot{I}_1, \dot{I}_2 |
| <i>A</i> | \dot{U}_1, \dot{I}_1 | \dot{U}_2, \dot{I}_2 |
| <i>B, или A⁻¹</i> | \dot{U}_2, \dot{I}_2 | \dot{U}_1, \dot{I}_1 |
| <i>H</i> | \dot{U}_1, \dot{I}_2 | \dot{I}_1, \dot{U}_2 |
| <i>G, или H⁻¹</i> | \dot{I}_1, \dot{U}_2 | \dot{U}_1, \dot{I}_2 |

Для получения матриц четырехполюсников необходимо определить коэффициенты, которые связывают для каждой конкретной схемы входные и выходные токи и напряжения четырехполюсника. Элементы матрицы можно определить как экспериментальным, так и расчетным путем.

7.2.1. Форма Y четырехполюсника.

Определим коэффициенты матрицы Y четырехполюсника по матрице сопротивлений цепи метода контурных токов.

Для этого по заданным напряжениям \dot{U}_1 и \dot{U}_2 четырехполюсника (рис. 7.2) определим токи \dot{I}_1 и \dot{I}_2 .

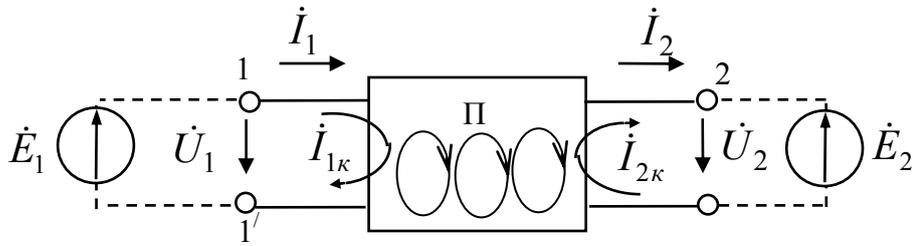


Рис. 7.2

Используем метод контурных токов. Выберем контура таким образом, чтобы входные зажимы вошли только в первый контур, а выходные - только во второй контур. Другие контура будут проходить по внутренней схеме четырехполюсника.

Для выбранных контуров $\dot{I}_1 = \dot{I}_{1к}$, $\dot{I}_2 = \dot{I}_{2к}$.

Решение задачи по методу контурных токов имеет вид

$$I = Z^{-1}E,$$

где
$$Z^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \dots \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix};$$

Δ - определитель матрицы сопротивлений цепи;

Δ_{mn} - алгебраические дополнения соответствующих элементов определителя.

Для данной схемы матрица контурных токов имеет вид

$$\begin{pmatrix} \dot{I}_{1к} \\ \dot{I}_{2к} \\ \dot{I}_{3к} \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\Delta_{11}}{\Delta} & \frac{\Delta_{21}}{\Delta} & \dots \\ \frac{\Delta_{12}}{\Delta} & \frac{\Delta_{22}}{\Delta} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{E}_1 \\ -\dot{E}_2 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \end{pmatrix},$$

где $\dot{E}_1 = \dot{U}_1$, $\dot{E}_2 = \dot{U}_2$.

Определим первый и второй контурные токи:

$$\dot{I}_{1к} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta} \dot{E}_1 - \frac{\Delta_{21}}{\Delta} \dot{E}_2 + 0 + \dots;$$

$$\dot{I}_{2к} = \frac{\Delta_{12}}{\Delta} \dot{E}_1 - \frac{\Delta_{22}}{\Delta} \dot{E}_2 + 0 + \dots$$

Если ввести обозначения:

$$Y_{11} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta}, \quad Y_{12} = -\frac{\Delta_{21}}{\Delta},$$

$$Y_{21} = \frac{\Delta_{12}}{\Delta}, \quad Y_{22} = -\frac{\Delta_{22}}{\Delta},$$

то получим скалярную форму записи уравнений четырехполюсника в форме Y :

$$\dot{I}_1 = Y_{11}\dot{U}_1 + Y_{12}\dot{U}_2; \quad (7.1)$$

$$\dot{I}_2 = Y_{21}\dot{U}_1 + Y_{22}\dot{U}_2. \quad (7.2)$$

Матричное уравнение формы Y имеет вид

$$I = YU,$$

где $Y = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{pmatrix}$.

Учитывая, что в матрице сопротивлений $\Delta_{12} = \Delta_{21}$, получим $Y_{12} = -Y_{21}$, т.е. из четырех коэффициентов четырехполюсника формы Y независимыми является только три. Размерность элементов матрицы Y есть сименс (См).

7.2.2. Форма Z (Y^{-1}) четырехполюсника.

Для получения коэффициентов матрицы Z решим матричное уравнение формы Y относительно матрицы напряжений \dot{U} .

$$U = ZI, \quad \text{где } Z = Y^{-1} \text{ - матрица обратная матрице } Y.$$

$$Z = Y^{-1} = \frac{1}{\Delta_Y} \begin{pmatrix} Y_{22} & -Y_{12} \\ -Y_{21} & Y_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix},$$

где $Z_{11} = \frac{Y_{22}}{\Delta_Y}$, $Z_{12} = \frac{-Y_{12}}{\Delta_Y}$, $Z_{21} = \frac{-Y_{21}}{\Delta_Y}$, $Z_{22} = \frac{Y_{11}}{\Delta_Y}$.

Из соотношения $Y_{12} = -Y_{21}$ следует, что $Z_{12} = -Z_{21}$. Т.е. в форме Z также из четырех элементов матрицы только три являются независимыми. Размерность всех элементов матрицы Z – Ом.

7.2.3. Форма A четырехполюсника.

Ранее эта форма считалась основной и широко использовалась в энергетике.

Скалярные уравнения формы A имеют вид:

$$\dot{U}_1 = A_{11}\dot{U}_2 + A_{12}\dot{I}_2, \quad (7.3)$$

$$\dot{I}_1 = A_{21}\dot{U}_2 + A_{22}\dot{I}_2. \quad (7.4)$$

Матричная форма записи:

$$\begin{pmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 \end{pmatrix}, \quad \text{где } A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

Получим элементы матрицы A по элементам матрицы Y . Для этого приведем скалярные уравнения формы Y к форме A .

Из уравнения (7.2) находим

$$\dot{U}_1 = -\frac{Y_{22}}{Y_{21}}\dot{U}_2 + \frac{1}{Y_{21}}\dot{I}_2. \quad (7.5)$$

Подставим в уравнение (7.1) выражение для \dot{U}_1 из (7.5) и получим

$$\dot{I}_1 = -Y_{11}\frac{Y_{22}}{Y_{21}}\dot{U}_2 + \frac{Y_{11}}{Y_{21}}\dot{I}_2 + Y_{12}\dot{U}_2 = \left(-Y_{11}\frac{Y_{22}}{Y_{21}} + Y_{12}\right)\dot{U}_2 + \frac{Y_{11}}{Y_{21}}\dot{I}_2. \quad (7.6)$$

Сопоставляя уравнения (7.3) и (7.4) с (7.5) и (7.6), имеем:

$$A_{11} = \frac{-Y_{22}}{Y_{21}}, \quad A_{12} = \frac{1}{Y_{21}}, \quad A_{21} = Y_{12} - Y_{11}\frac{Y_{22}}{Y_{21}}, \quad A_{22} = \frac{Y_{11}}{Y_{21}}.$$

В матрице A из четырех элементов независимыми являются только три. Покажем, что определитель матрицы A равняется единице, т.е.

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = A_{11}A_{22} - A_{21}A_{12} = 1. \quad (7.7)$$

Для этого достаточно в уравнение (7.7) подставить выражения коэффициентов формы A через коэффициенты формы Y и учесть, что $Y_{12} = -Y_{21}$. Это важное свойство матрицы A .

7.2.4. Форма B (A^{-1}) четырехполюсника.

Определим матрицу B по коэффициентам матрицы A .

$$B = A^{-1} = \frac{1}{\Delta_A} \begin{pmatrix} A_{22} & -A_{12} \\ -A_{21} & A_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}.$$

Определитель матрицы A $\Delta_A = 1$, поэтому $B_{11} = A_{22}$, $B_{12} = -A_{12}$, $B_{21} = -A_{21}$, $B_{22} = A_{11}$.

Определитель $|B| = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = |A| = 1$. То есть из четырех коэффициентов матрицы B независимыми является только три.

Скалярные уравнения формы B четырехполюсника имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{U}_2 &= B_{11}\dot{U}_1 + B_{12}\dot{I}_1; \\ \dot{I}_2 &= B_{21}\dot{U}_1 + B_{22}\dot{I}_1. \end{aligned}$$

7.2.5. Форма H четырехполюсника.

Скалярная система уравнений формы H имеет вид:

$$\begin{aligned}\dot{U}_1 &= H_{11}\dot{I}_1 + H_{12}\dot{U}_2; \\ \dot{I}_2 &= H_{21}\dot{I}_1 + H_{22}\dot{U}_2.\end{aligned}$$

Матричная запись уравнений формы H

$$\begin{pmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_2 \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{U}_2 \end{pmatrix}.$$

Определим элементы матрицы H по матрице A четырехполюсника. Для этого скалярную систему уравнений формы A перепишем таким образом, чтобы предать им вид формы H , т.е. выразим \dot{U}_1 и \dot{I}_2 через \dot{I}_1 и \dot{U}_2 . Из уравнения (7.4) формы A находим

$$\dot{I}_2 = \frac{1}{A_{22}}\dot{I}_1 - \frac{A_{21}}{A_{22}}\dot{U}_2.$$

Подставим \dot{I}_2 в уравнение (7.3) формы A

$$\dot{U}_1 = A_{11}\dot{U}_2 + \frac{A_{12}}{A_{22}}\dot{I}_1 - \frac{A_{21}A_{12}}{A_{22}}\dot{U}_2 = \frac{A_{12}}{A_{22}}\dot{I}_1 + \left(A_{11} - \frac{A_{21}A_{12}}{A_{22}}\right)\dot{U}_2.$$

Сопоставим полученные выражения для \dot{U}_1 и \dot{I}_2 со скалярными уравнениями формы H . Получим:

$$H_{11} = \frac{A_{12}}{A_{22}}, \quad H_{12} = A_{11} - \frac{A_{21}A_{12}}{A_{22}}, \quad H_{21} = \frac{1}{A_{22}}, \quad H_{22} = -\frac{A_{21}}{A_{22}}.$$

Рассмотрим отношение элементов

$$\frac{H_{12}}{H_{21}} = A_{22} \left(A_{11} - \frac{A_{21}A_{12}}{A_{22}} \right) = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = 1, \text{ т.е. } H_{21} = H_{12}.$$

Опять таки, из четырех коэффициентов формы H независимыми являются только три.

7.2.6. Форма G (H^{-1}) четырехполюсника.

Скалярная система уравнений имеет вид:

$$\begin{aligned}\dot{I}_1 &= G_{11}\dot{U}_1 + G_{12}\dot{I}_2; \\ \dot{U}_2 &= G_{21}\dot{U}_1 + G_{22}\dot{I}_2.\end{aligned}$$

Матричная запись уравнений формы G

$$\begin{pmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{U}_2 \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_2 \end{pmatrix}.$$

Определим коэффициенты матрицы G по коэффициентам формы H :

$$G = H^{-1} = \frac{1}{\Delta_H} \begin{pmatrix} H_{22} & -H_{12} \\ -H_{21} & H_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix},$$

где $G_{11} = \frac{H_{22}}{\Delta_H}$, $G_{12} = \frac{-H_{12}}{\Delta_H}$, $G_{21} = \frac{-H_{21}}{\Delta_H}$, $G_{22} = \frac{H_{11}}{\Delta_H}$.

Как и в других формах, матрица G имеет лишь три независимых элемента, так как $G_{12} = G_{21}$.

Следует отметить, что положительное направление тока \dot{I}_2 можно принять противоположным (рис. 7.3).

При этом все соотношения, которые были получены ранее, изменятся за счет изменения знаков перед элементами матриц. Это можно учесть, если проследить, перед какими элементами каждой матрицы появится знак минус.

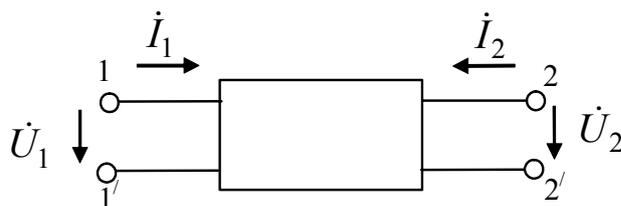


Рис. 7.3

7.3. Соединения четырехполюсников.

7.3.1. Каскадное соединение.

Пример каскадного соединения представлен на рис. 7.4.

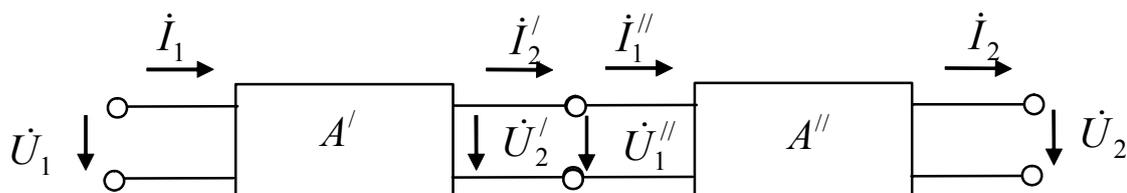


Рис. 7.4

Такое соединение четырехполюсников называют каскадным, однако в некоторых курсах, например, в курсе «Автоматическое управление и регулирование» его называют последовательным. При таком соединении выходные зажимы предыдущего четырехполюсника являются входными зажимами следующего.

Рассмотрим каскадное соединение двух четырехполюсников. Запишем матричные уравнения в форме A первого и второго четырехполюсника:

$$\begin{pmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{pmatrix} = A' \begin{pmatrix} \dot{U}_2' \\ \dot{I}_2' \end{pmatrix}; \quad (7.8)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{U}_1'' \\ \dot{I}_1'' \end{pmatrix} = A'' \begin{pmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 \end{pmatrix}. \quad (7.9)$$

Подставим в уравнение (7.8) вместо матрицы $\begin{pmatrix} \dot{U}_2' \\ \dot{I}_2' \end{pmatrix}$ тождественную ей

матрицу $\begin{pmatrix} \dot{U}_1'' \\ \dot{I}_1'' \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{pmatrix} = A' A'' \begin{pmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, при каскадном соединении четырехполюсников матрицы A перемножаются. Это справедливо при любом числе звеньев.

7.3.2. Параллельное соединение четырехполюсников.

Соединение, при котором одноименные зажимы четырехполюсников соединены между собой, называется параллельным.

В предыдущих рассуждениях мы исходили из того, что прямой и обратный ток для одноименных зажимов четырехполюсника одинаковый, т.е.

$$I_{1n}' = I_{1ob}', \quad I_{1n}'' = I_{1ob}'' \quad (\text{рис. 7.5}).$$

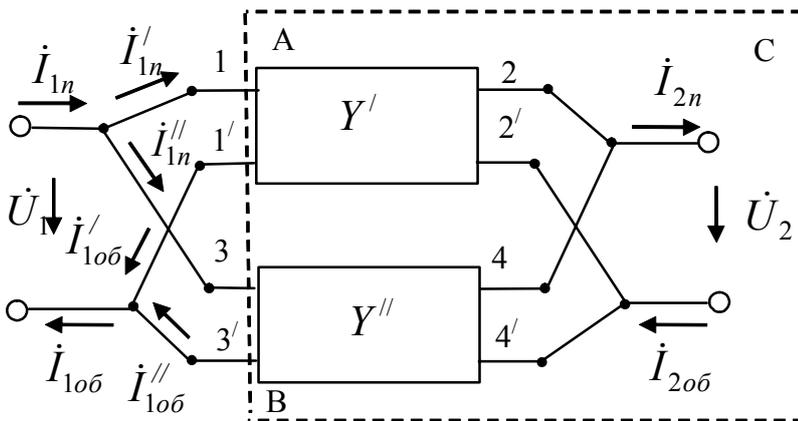


Рис. 7.5

То же самое относится к выходным зажимам 2-2' и 4-4'.

Эти уравнения являются основой всех соотношений, которые были получены ранее для отдельных четырехполюсников.

Для изолированного четырехполюсника и для всей совокупности четырехполюсников эти уравнения всегда являются

справедливыми, так как они вытекают из первого закона Кирхгофа для сложного узла. Однако, для отдельных четырехполюсников, которые входят в состав такой группы (в данном случае параллельно соединенных четырехполюсников), это условие не всегда выполняется. Запишем первый закон Кирхгофа для сложного узла ABC

$$\dot{I}'_{1n} + \dot{I}''_{1n} - \dot{I}'_{1ob} - \dot{I}''_{1ob} = 0,$$

откуда совсем не вытекает, что $\dot{I}'_{1n} = \dot{I}'_{1ob}$ и $\dot{I}''_{1n} = \dot{I}''_{1ob}$.

Соединение четырехполюсников, при котором условие равенства прямого и обратного токов сохраняется для всех четырехполюсников, называется **регулярным**. Если это условие не выполняется, то такое соединение четырехполюсников будет **нерегулярным**.

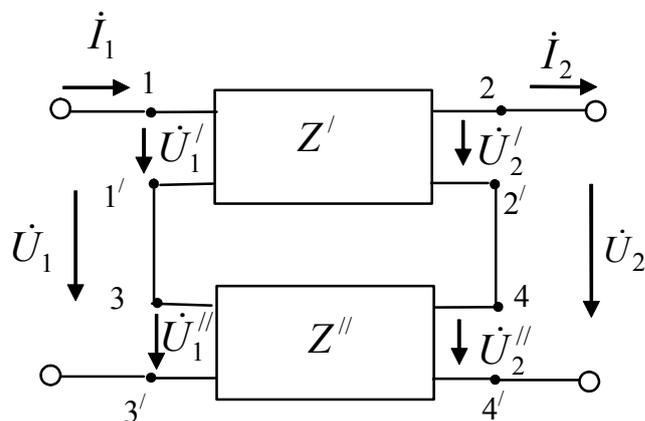


Рис. 7.7

$$\begin{pmatrix} \dot{U}'_1 \\ \dot{U}'_2 \end{pmatrix} = Z' \begin{pmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \dot{U}''_1 \\ \dot{U}''_2 \end{pmatrix} = Z'' \begin{pmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{pmatrix}.$$

Общее входное напряжение равно сумме входных напряжений на каждом четырехполюснике. То же относится и к выходному напряжению

$$\begin{pmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{U}'_1 \\ \dot{U}'_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{U}''_1 \\ \dot{U}''_2 \end{pmatrix} = [Z' + Z''] \begin{pmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{pmatrix} = Z \begin{pmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{pmatrix},$$

где $Z = Z' + Z''$.

Вывод. При регулярном последовательном соединении любого количества четырехполюсников матрицы Z складываются.

Существуют еще три способа соединения четырехполюсников.

Обратный каскад – это каскадное соединение четырехполюсников, когда питание подается на выходные зажимы. Матрица результирующего четырехполюсника при этом равняется произведению матриц B составляющих четырехполюсников.

Параллельно-последовательное соединение – входные зажимы четырехполюсников соединены параллельно, а выходные – последовательно. При этом прибавляются матрицы G составляющих четырехполюсников.

Последовательно-параллельное соединение – входные зажимы соединены последовательно, а выходные – параллельно. При этом прибавляются матрицы H составляющих четырехполюсников.

Лекция 16

План лекции:

- 7.4. Симметричный четырехполюсник.
- 7.5. Методы вычисления матриц четырехполюсников.
- 7.6. Схемы замещения пассивных четырехполюсников.
- 7.7. Входное сопротивление четырехполюсника. Характеристические сопротивления. Повторное сопротивление.

7.8. Коэффициент распространения (мера передачи) четырехполюсника. Логарифмические единицы затухания.

7.9. Запись уравнений четырехполюсника через вторичные параметры.

7.4. Симметричный четырехполюсник.

Рассмотрим четырехполюсник, изображенный на рис. 7.8.

Запишем скалярную систему уравнений четырехполюсника в форме A при прямом питании (направление от левых зажимов к правым).

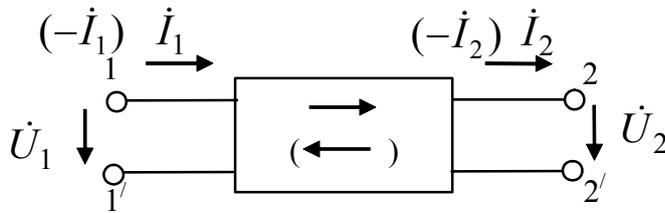


Рис. 7.8

$$\dot{U}_1 = A_{11}\dot{U}_2 + A_{12}\dot{I}_2;$$

$$\dot{I}_1 = A_{21}\dot{U}_2 + A_{22}\dot{I}_2.$$

Изменим направление питания на противоположное. При этом все обозначения оставим прежними. Тогда токи \dot{I}_1 и \dot{I}_2

изменяют направления на противоположные, т.е. в уравнениях перед ними появится знак «-». Система уравнений будет иметь вид

$$\dot{U}_1 = A_{11}\dot{U}_2 - A_{12}\dot{I}_2; \quad \text{или} \quad \dot{U}_1 = A_{11}\dot{U}_2 - A_{12}\dot{I}_2;$$

$$-\dot{I}_1 = A_{21}\dot{U}_2 - A_{22}\dot{I}_2, \quad \dot{I}_1 = -A_{21}\dot{U}_2 + A_{22}\dot{I}_2.$$

В матричной форме записи
$$\begin{pmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & -A_{12} \\ -A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 \end{pmatrix}.$$

Решим матричное уравнение относительно $\begin{pmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 \end{pmatrix}$, тогда имеем

$$\begin{pmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta_A} \begin{pmatrix} A_{22} & A_{12} \\ A_{21} & A_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{pmatrix}.$$

Обозначим напряжение питания и входной ток индексом 1, а выходной ток и напряжение индексом 2.

Учитывая, что $\Delta_A = 1$, для обратного питания четырехполюсника имеем

$$\begin{pmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{22} & A_{12} \\ A_{21} & A_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 \end{pmatrix}.$$

Вывод. При изменении направления питания четырехполюсника в матрице A меняются местами элементы главной диагонали.

Четырехполюсник называется **симметричным**, если при изменении направления его питания (иначе, при изменении местами входных и выходных зажимов) токи и напряжения во внешней цепи не изменяются.

Из определения вытекает, что для симметричного четырехполюсника $A_{11} = A_{22}$.

Таким образом, симметричный четырехполюсник имеет только два независимых элемента матрицы.

7.5. Методы вычисления матриц четырехполюсников.

Для определения коэффициентов четырехполюсника расчетным путем необходимо знать схему четырехполюсника. Используя какой-либо метод, получают соотношения, которые связывают входные и выходные токи и напряжения. Сопоставляя полученные соотношения соответствующей форме уравнений, получают коэффициенты четырехполюсника.

7.5.1. Определение коэффициентов четырехполюсника по матрице собственных и общих сопротивлений метода контурных токов.

Исходя из схемы четырехполюсника, выбираем необходимое число контуров, причем входные зажимы должны входить только в первый контур, а выходные – во второй. Обычным способом составляем матрицу сопротивлений цепи Z . По полученным ранее соотношениям определяем элементы матрицы Y :

$$Y_{11} = \frac{\Delta_{11}}{\Delta_Z}, \quad Y_{12} = -\frac{\Delta_{21}}{\Delta_Z}, \quad Y_{21} = \frac{\Delta_{12}}{\Delta_Z}, \quad Y_{22} = -\frac{\Delta_{22}}{\Delta_Z},$$

где Δ_Z - определитель матрицы Z , Δ_{ij} - алгебраическое дополнение соответствующих элементов определителя матрицы сопротивлений цепи.

По матрице Y четырехполюсника можно вычислить остальные матрицы.

7.5.2. Метод сравнения (расчет элементов матриц по уравнениям законов Кирхгофа).

Для конкретной схемы по законам Кирхгофа определяется связь между входными и выходными токами и напряжениями. Комбинация пар определяется необходимой формой записи. Полученные соотношения сравниваются с уравнениями рассматриваемой формы.

Пример.

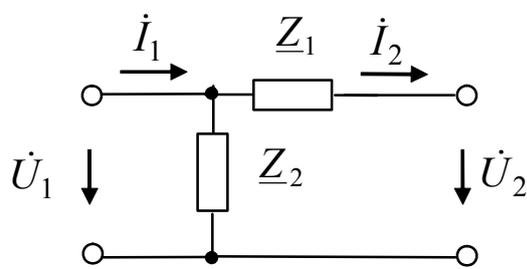


Рис. 7.9

Получить матрицу A четырехполюсника, схема которого приведена на рис. 7.9.

Запишем законы Кирхгофа:

$$\dot{U}_1 = \dot{U}_2 + \dot{I}_2 Z_1,$$

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \frac{\dot{U}_1}{Z_2} = \frac{1}{Z_2} \dot{U}_2 + \frac{Z_1}{Z_2} \dot{I}_2 + \dot{I}_2 =$$

$$= \frac{1}{Z_2} \dot{U}_2 + \left(1 + \frac{Z_1}{Z_2}\right) \dot{I}_2.$$

Сравнивая полученные уравнения со скалярной формой A четырехполюсника, получим:

$$A_{11} = 1, \quad A_{12} = \underline{Z}_1, \quad A_{21} = \frac{1}{\underline{Z}_2}, \quad A_{22} = 1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}.$$

7.5.3. Представление сложного четырехполюсника соединением простых.

Если сложную схему четырехполюсника можно представить в виде последовательного, параллельного или каскадного соединения более простых четырехполюсников, то в этом случае целесообразно рассчитать матрицы соответствующих форм составляющих четырехполюсников и, воспользовавшись связью матриц отдельных четырехполюсников с матрицей сложного четырехполюсника, определить ее коэффициенты.

Например, схему двойного «Т» - образного фильтра (рис. 7.10,а) можно представить в виде параллельного соединения двух простых «Т» - образных четырехполюсников (рис. 7.10,б).

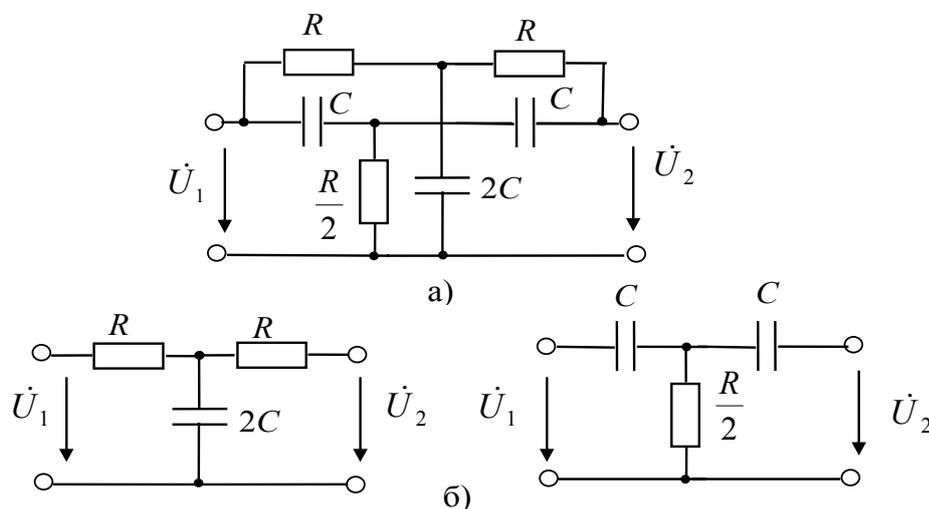


Рис.7.10

Поскольку при параллельном соединении четырехполюсников прибавляются матрицы Y их составляющих, то целесообразно сначала определить коэффициенты Y' и Y'' составляющих четырехполюсников, потом прибавить их и получить коэффициенты Y исходного четырехполюсника. По коэффициентам формы Y можно определить другие матрицы четырехполюсника.

Если сложный четырехполюсник представляет собой каскадное соединение простых, то его матрица A может быть получена как произведение матриц простых четырехполюсников. Порядок множителей определяется порядком соединения четырехполюсников.

7.5.4. Определение коэффициентов четырехполюсника по опытам холостого хода и короткого замыкания.

Для получения матрицы четырехполюсника можно ограничиться опытом холостого хода и опытом короткого замыкания. Это наиболее общий метод вычисления матриц четырехполюсников.

Этот метод может быть как расчетным, так и экспериментальным. Если в первом случае должна быть известна схема четырехполюсника, то во втором - она не нужна.

Для получения матрицы несимметричного четырехполюсника надо выполнить три опыта (для определения трех независимых элементов матрицы). Для симметричного четырехполюсника - только два опыта.

Запишем скалярные уравнения формы A :

$$\dot{U}_1 = A_{11}\dot{U}_2 + A_{12}\dot{I}_2;$$

$$\dot{I}_1 = A_{21}\dot{U}_2 + A_{22}\dot{I}_2.$$

Пусть вторичные зажимы разомкнуты - холостой ход, $\dot{I}_2 = 0$, тогда:

$$A_{11} = \frac{\dot{U}_{10}}{\dot{U}_{20}}, \quad A_{21} = \frac{\dot{I}_{10}}{\dot{U}_{20}}.$$

Если вторичные зажимы замкнуты (короткое замыкание) $\dot{U}_2 = 0$, тогда:

$$A_{12} = \frac{\dot{U}_{1к}}{\dot{I}_{2к}}, \quad A_{22} = \frac{\dot{I}_{1к}}{\dot{I}_{2к}}.$$

Пример.

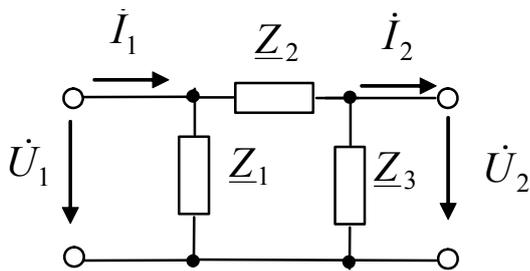


Рис. 7.11

Используя метод холостого хода и короткого замыкания рассчитать элементы матрицы A для «Π» - образного четырехполюсника (рис. 7.11).

1. Холостой ход. $\dot{I}_2 = 0$.

Дано: \dot{U}_1 . Определить \dot{U}_2 .

$$\dot{U}_2 = \underline{Z}_3 \cdot \frac{\dot{U}_1}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}; \quad A_{11} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_3} + 1.$$

Дано: \dot{I}_1 . Определить \dot{U}_2 .

$$\dot{U}_2 = \underline{Z}_3 \cdot \dot{I}_1 \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}; \quad A_{21} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_1} = \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 \underline{Z}_3}.$$

2. Короткое замыкание, $\dot{U}_2 = 0$.

Дано: \dot{U}_1 . Определить \dot{I}_2 .

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_1}{\underline{Z}_2}; \quad A_{12} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_2} = \underline{Z}_2.$$

Дано: \dot{I}_1 . Определить \dot{I}_2 .

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_1 \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}; \quad A_{22} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} = \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1} = 1 + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1}.$$

Определив расчетным (или опытным) путем коэффициенты матрицы A , можно определить и все другие матрицы четырехполюсника.

7.5.5. Расчет коэффициентов матрицы A по сопротивлениям холостого хода и короткого замыкания.

Рассмотрим скалярные уравнения формы A четырехполюсника.

$$\dot{U}_1 = A_{11}\dot{U}_2 + A_{12}\dot{I}_2;$$

$$\dot{I}_1 = A_{21}\dot{U}_2 + A_{22}\dot{I}_2.$$

Выразим коэффициенты матрицы через сопротивления холостого хода и короткого замыкания \underline{Z}_{10} , $\underline{Z}_{1к}$, \underline{Z}_{20} , $\underline{Z}_{2к}$.

Если на зажимах 2-2' холостой ход, т.е. $\dot{I}_2 = 0$, тогда:

$$\dot{U}_{10} = A_{11}\dot{U}_{20}; \quad \dot{I}_{10} = A_{21}\dot{U}_{20}; \quad \underline{Z}_{10} = \frac{\dot{U}_{10}}{\dot{I}_{10}} = \frac{A_{11}}{A_{21}}.$$

Если на зажимах 2-2' короткое замыкание, т.е. $\dot{U}_2 = 0$, тогда:

$$\dot{U}_{1к} = A_{12}\dot{I}_{2к}; \quad \dot{I}_{1к} = A_{22}\dot{I}_{2к}; \quad \underline{Z}_{1к} = \frac{\dot{U}_{1к}}{\dot{I}_{1к}} = \frac{A_{12}}{A_{22}}.$$

При обратном питании четырехполюсника (со стороны зажимов 2-2') опыты холостого хода и короткого замыкания дают с учетом перемены местами элементов A_{11} и A_{22} такие соотношения:

$$\underline{Z}_{20} = \frac{A_{22}}{A_{21}}; \quad \underline{Z}_{2к} = \frac{A_{12}}{A_{11}}.$$

Таким образом, имеем четыре уравнения с четырьмя неизвестными:

$$\underline{Z}_{10} = \frac{A_{11}}{A_{21}}; \quad \underline{Z}_{1к} = \frac{A_{12}}{A_{22}}; \quad \underline{Z}_{20} = \frac{A_{22}}{A_{21}}; \quad \underline{Z}_{2к} = \frac{A_{12}}{A_{11}}.$$

Из четырех элементов матрицы независимыми являются только три, поэтому достаточно первых трех уравнений. Четвертое уравнение связывает коэффициенты матрицы A

$$A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = 1.$$

Решаем совместно четыре уравнения и находим элементы матрицы A :

$$A_{22} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{20}}{\underline{Z}_{10} - \underline{Z}_{1к}}}; \quad A_{12} = \underline{Z}_{1к}A_{22}; \quad A_{21} = \frac{A_{22}}{\underline{Z}_{20}}; \quad A_{11} = \underline{Z}_{10} \frac{A_{22}}{\underline{Z}_{20}}.$$

Скалярные уравнения четырехполюсника можно записать с помощью коэффициентов, которые выражены через сопротивления холостого хода и короткого замыкания. Это - запись через вторичные параметры четырехполюсника.

Пример.

Рассчитаем коэффициенты формы A T-образного четырехполюсника (рис. 7.12) по сопротивлениям холостого хода и короткого замыкания.

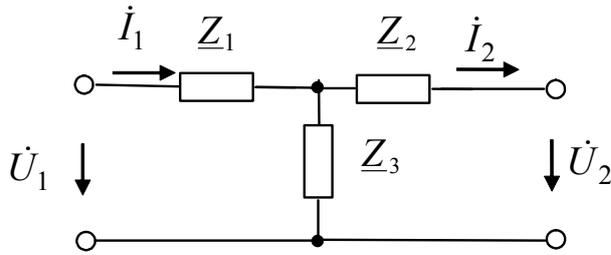


Рис. 7.12

Входные сопротивления со стороны первичных зажимов при холостом ходе и коротком замыкании на выходных зажимах равняются соответственно:

$$\underline{Z}_{10} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_3,$$

$$\underline{Z}_{1к} = \underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3},$$

а со стороны выходных зажимов при холостом ходе на входных

$$\underline{Z}_{20} = \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3.$$

Используя приведенные выше формулы, определим коэффициенты формы A четырехполюсника.

$$A_{22} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{20}}{\underline{Z}_{10} - \underline{Z}_{1к}}} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3 - \underline{Z}_1 - \frac{\underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}}} = 1 + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_3}, \quad (7.10)$$

$$A_{12} = \underline{Z}_{1к} A_{22} = \left(\underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}\right) \left(\frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}{\underline{Z}_3}\right) = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_3}, \quad (7.11)$$

$$A_{21} = \frac{A_{22}}{\underline{Z}_{20}} = \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}{\underline{Z}_3} \cdot \frac{1}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = \frac{1}{\underline{Z}_3}, \quad (7.12)$$

$$A_{11} = A_{22} \frac{\underline{Z}_{10}}{\underline{Z}_{20}} = \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}{\underline{Z}_3} \cdot \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = 1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_3}. \quad (7.13)$$

7.6. Схемы замещения пассивных четырехполюсников.

Пассивные четырехполюсники характеризуются матрицей второго порядка, в которой из четырех коэффициентов матрицы любой формы независимыми есть только три. Поэтому простейшие схемы замещения четырехполюсников должны иметь, по меньшей мере, три сопротивления.

Существуют лишь две схемы четырехполюсников, которые состоят из трех сопротивлений: «Т» и «П» - образные схемы замещения, которые приведены на рис. 7.13,а и б.

По коэффициентам любой формы четырехполюсника можно определить параметры «Т» и «П» - образной схемы замещения четырехполюсника.

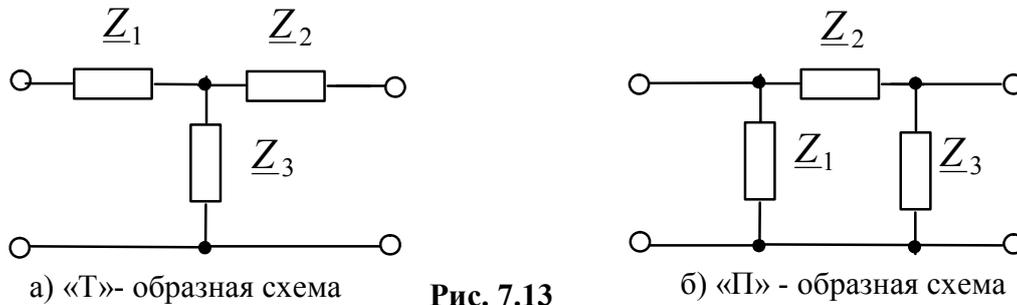


Рис. 7.13

Пример. Определить параметры «Т» - образной схемы замещения четырехполюсника (рис. 7.13, а) по коэффициентам формы A .

Решим уравнения (7.10-7.13) для коэффициентов формы A «Т» - образного четырехполюсника относительно сопротивлений $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, \underline{Z}_3$.

Из выражения (7.12) имеем $\underline{Z}_3 = \frac{1}{A_{21}}$. Подставляя \underline{Z}_3 в выражения (7.10)

и (7.13), определяем остальные сопротивления:

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_3(A_{11} - 1), \quad \underline{Z}_2 = \underline{Z}_3(A_{22} - 1).$$

Аналогично можно определить параметры «П» - образной схемы замещения любого четырехполюсника.

7.7. Входное сопротивление четырехполюсника.

Характеристические сопротивления. Повторное сопротивление.

Входное сопротивление пары зажимов определяется отношением комплексных значений напряжения и тока этих зажимов при соответствующем выборе направлений тока и напряжения (рис. 7.14).

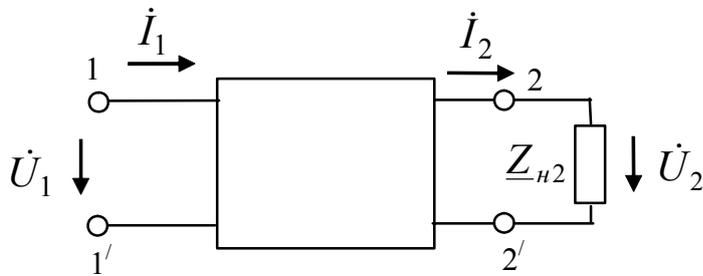


Рис. 7.14

К входным зажимам подключено напряжение \dot{U}_1 , а к выходным – подключена нагрузка $\underline{Z}_{н2}$, напряжение на которой

$$\dot{U}_2 = \underline{Z}_{н2} \dot{I}_2.$$

Определим входное сопротивление со стороны входных зажимов \underline{Z}_{1ex} , используя уравнения формы A четырехполюсника:

$$\dot{U}_1 = A_{11}\dot{U}_2 + A_{12}\dot{I}_2;$$

$$\dot{I}_1 = A_{21}\dot{U}_2 + A_{22}\dot{I}_2.$$

$$\underline{Z}_{1ex} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{A_{11}\dot{U}_2 + A_{12}\dot{I}_2}{A_{21}\dot{U}_2 + A_{22}\dot{I}_2} = \frac{A_{11}\underline{Z}_{н2} + A_{12}}{A_{21}\underline{Z}_{н2} + A_{22}}.$$

Входное сопротивление со стороны вторичных зажимов легко определить, если изменить питание на обратное, и нагрузить зажимы 1-1' сопротивле-

нием \underline{Z}_{n1} . При обратном питании в матрице A меняются местами элементы A_{11} и A_{22} , поэтому

$$\underline{Z}_{2ex} = \frac{A_{22}\underline{Z}_{n1} + A_{12}}{A_{21}\underline{Z}_{n1} + A_{11}}.$$

Определим такое сопротивление нагрузки \underline{Z}_{n2} , при котором четырехполюсник будет отдавать в нагрузку максимально полную мощность при заданной мощности на входе. Такой режим работы четырехполюсника называется согласованным.

Комплексная мощность на входе $\tilde{S}_1 = \dot{U}_1 I_1^*$, на выходе - $\tilde{S}_2 = \dot{U}_2 I_2^*$.

Определим максимум отношения $\left| \frac{\tilde{S}_2}{\tilde{S}_1} \right|$ по сопротивлению \underline{Z}_{n2} .

Для этого запишем комплексную мощность на входных зажимах, используя уравнения формы A

$$\begin{aligned} \tilde{S}_1 &= (A_{11}\dot{U}_2 + A_{12}\dot{I}_1)(A_{21}\dot{U}_2 + A_{22}\dot{I}_2)^* = \left(A_{11} + \frac{A_{12}}{\underline{Z}_{n2}}\right)(A_{21}\underline{Z}_{n2} + A_{22})^* \dot{U}_2 I_2^* = \\ &= \left(A_{11} + \frac{A_{12}}{\underline{Z}_{n2}}\right)(A_{21}\underline{Z}_{n2} + A_{22})^* \tilde{S}_2. \end{aligned}$$

Откуда $\left| \frac{\tilde{S}_2}{\tilde{S}_1} \right| = \frac{1}{\left| A_{11} + \frac{A_{12}}{\underline{Z}_{n2}} \right| |A_{21}\underline{Z}_{n2} + A_{22}|}$. Дифференцируя данное выра-

жение по \underline{Z}_{n2} и приравнявая производную к нулю получаем сопротивление нагрузки

$$\underline{Z}_{n2} = \underline{Z}_{c2} = \sqrt{\frac{A_{12}A_{22}}{A_{21}A_{11}}}.$$

Это сопротивление называется **характеристическим** или **согласованным сопротивлением нагрузки** четырехполюсника и обозначается \underline{Z}_{c2} .

Входное сопротивление четырехполюсника, который нагружен на сопротивление \underline{Z}_{c2} , называется **характеристическим сопротивлением входа**

$$\underline{Z}_{1ex} = \underline{Z}_{c1} = \frac{A_{11}\underline{Z}_{c2} + A_{12}}{A_{21}\underline{Z}_{c2} + A_{22}} = \sqrt{\frac{A_{11}A_{12}}{A_{21}A_{22}}}.$$

Эти сопротивления удовлетворяют условию: если четырехполюсник нагрузить сопротивлением \underline{Z}_{c2} , то его входное сопротивление $\underline{Z}_{1ex} = \underline{Z}_{c1}$, а если четырехполюсник нагрузить со стороны первичных зажимов сопротивлением \underline{Z}_{c1} , то входное сопротивление со стороны вторичных зажимов $\underline{Z}_{2ex} = \underline{Z}_{c2}$.

Для симметричного четырехполюсника, у которого $A_{11} = A_{22}$, имеем

$$\underline{Z}_{c1} = \underline{Z}_{c2} = \sqrt{\frac{A_{12}}{A_{21}}} = \underline{Z}_{\Pi}.$$

Это сопротивление носит название **повторного сопротивления**, так как, если нагрузить им четырехполюсник, то его входное сопротивление также будет \underline{Z}_{Π} . Симметричный четырехполюсник не преобразует, а повторяет на входных полюсах согласованное сопротивление нагрузки.

Если четырехполюсник питается от источника напряжения с внутренним сопротивлением $\underline{Z}_{\text{вн}} = \underline{Z}_{c1}$, а со стороны вторичных зажимов он нагружен характеристическим сопротивлением \underline{Z}_{c2} , то такой четырехполюсник считается полностью согласованным. В случае чисто активных характеристических сопротивлений для такого четырехполюсника выполняется условие передачи максимальной активной мощности как от источника питания к четырехполюснику, так и от четырехполюсника к нагрузке.

Получим формулы для характеристических сопротивлений входа и выхода по опытам холостого хода и короткого замыкания, используя уравнения формы A четырехполюсника.

$$\dot{U}_1 = A_{11}\dot{U}_2 + A_{12}\dot{I}_2;$$

$$\dot{I}_1 = A_{21}\dot{U}_2 + A_{22}\dot{I}_2.$$

$$\text{Холостой ход на выходе: } \dot{I}_2 = 0; \quad \underline{Z}_{10} = \frac{\dot{U}_{10}}{\dot{I}_{10}} = \frac{A_{11}}{A_{21}}.$$

$$\text{Короткое замыкание на выходных зажимах: } \dot{U}_2 = 0; \quad \underline{Z}_{1\kappa} = \frac{\dot{U}_{1\kappa}}{\dot{I}_{1\kappa}} = \frac{A_{12}}{A_{22}}.$$

Тогда, сравнивая выражение для характеристического сопротивления входа с входными сопротивлениями холостого хода и короткого замыкания, имеем

$$\underline{Z}_{c1} = \sqrt{\underline{Z}_{10}\underline{Z}_{1\kappa}}, \quad \text{соответственно} \quad \underline{Z}_{c2} = \sqrt{\underline{Z}_{20}\underline{Z}_{2\kappa}}.$$

Для симметричного четырехполюсника, у которого $A_{11} = A_{22}$

$$\underline{Z}_{c1} = \underline{Z}_{c2} = \underline{Z}_{\Pi} = \sqrt{\underline{Z}_0\underline{Z}_{\kappa}}.$$

7.8. Коэффициент распространения (мера передачи) четырехполюсника. Логарифмические единицы затухания

Как следует из вышеприведенных выражений, характеристические сопротивления входа и выхода четырехполюсника определяются только свойствами четырехполюсника (схемой и параметрами элементов). Для полного определения свойств четырехполюсника вводят еще одну величину, которая имеет название **коэффициента распространения** (не путать с термином «коэффициент передачи» по напряжению и току $K_U = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1}$, $K_I = \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1}$).

Запишем уравнение формы A симметричного четырехполюсника, который нагружен повторным сопротивлением $\underline{Z}_{II} = \sqrt{\frac{A_{12}}{A_{21}}}$:

$$\dot{U}_1 = A_{11}\dot{U}_2 + A_{12}\dot{I}_2 = \left(A_{11} + A_{12}\frac{1}{\underline{Z}_{II}}\right)\dot{U}_2;$$

$$\dot{I}_1 = A_{21}\dot{U}_2 + A_{22}\dot{I}_2 = (A_{21}\underline{Z}_{II} + A_{22})\dot{I}_2.$$

Рассмотрим отношение $\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2}$, которое показывает, как изменяется входное напряжение при прохождении через четырехполюсник.

$$\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = A_{11} + A_{12}\sqrt{\frac{A_{21}}{A_{12}}} = A_{11} + \sqrt{A_{12}A_{21}}.$$

Аналогично для токов:

$$\frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} = A_{21}\sqrt{\frac{A_{12}}{A_{21}}} + A_{22} = A_{22} + \sqrt{A_{12}A_{21}}.$$

У симметричного четырехполюсника $A_{11} = A_{22}$, поэтому

$$\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} = A_{11} + \sqrt{A_{12}A_{21}}.$$

Записывая комплексные токи и напряжения в показательной форме, получим:

$$\frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = \frac{I_1}{I_2} e^{j(\psi_{i1} - \psi_{i2})} = \frac{U_1}{U_2} e^{j(\psi_{u1} - \psi_{u2})} = e^{\alpha} \cdot e^{j\beta} = e^{\alpha + j\beta} = e^{\gamma},$$

где $\alpha = \ln \frac{U_1}{U_2} = \ln \frac{I_1}{I_2}$ - коэффициент затухания четырехполюсника;

$\beta = \psi_{u1} - \psi_{u2} = \psi_{i1} - \psi_{i2}$ - коэффициент фазы.

Величина $\gamma = \alpha + j\beta = \ln \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = \ln \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} = \ln(A_{11} + \sqrt{A_{12}A_{21}})$ называется

коэффициентом распространения или **мерой передачи** четырехполюсника.

Коэффициент затухания является безразмерной величиной, но условно, определенный таким образом коэффициент α , измеряют в неперах (Нп). Затухание в 1 Нп означает, что при прохождении сигнала через четырехполюсник напряжение и ток уменьшаются в $e = 2,718\dots$ раз.

Для симметричного четырехполюсника, который нагружен повторным сопротивлением, отношение мощностей на входе и выходе

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{U_1 I_1 \cos \varphi_1}{U_2 I_2 \cos \varphi_2} = \frac{U_1^2}{U_2^2} = \frac{I_1^2}{I_2^2}.$$

$$\text{Тогда } \alpha = \ln \frac{U_1}{U_2} = \ln \sqrt{\frac{P_1}{P_2}} = \frac{1}{2} \ln \frac{P_1}{P_2} \text{ (Нп)}.$$

На использовании десятичного логарифма основана единица затухания бел (Б). Значение этой единицы затухания определяется логарифмом отношения мощностей

$$\alpha = \lg \frac{P_1}{P_2} \text{ (Б)}.$$

Затухание в 1 Б означает, что при прохождении сигнала через четырехполюсник мощность на входе превышает мощность на выходе в 10 раз.

На практике чаще используется единица в 10 раз меньшая бела - децибел (дБ).

$$\alpha_{\text{дБ}} = 10 \lg \frac{P_1}{P_2}.$$

Таким образом, если мощность сигнала изменяется в геометрической прогрессии, например, выходная мощность усилителя возрастает в пропорции: 1 Вт, 10 Вт, 100 Вт, 1000 Вт, то число децибел изменяется в арифметической прогрессии - 10 дБ, 20 дБ, 30 дБ.

Это связано со слуховым восприятием звукового сигнала. Увеличение мощности звука с 1 до 10 Вт, человек воспринимает как увеличение в 2 раза. Аналогично с 10 до 100 Вт - лишь в 2 раза.

Легко показать, что между затуханием четырехполюсника в неперах и децибелах существует связь:

$$1 \text{ Нп} = 8,686 \text{ дБ}, \quad 1 \text{ дБ} = 0,115 \text{ Нп}.$$

Характеристические сопротивления Z_{c1} и Z_{c2} и коэффициент распространения γ полностью определяют четырехполюсник, поэтому их называют **вторичными параметрами четырехполюсника**.

Рассмотрим каскадное соединение симметричных четырехполюсников, которые имеют одинаковое повторное сопротивление (рис. 7.15).

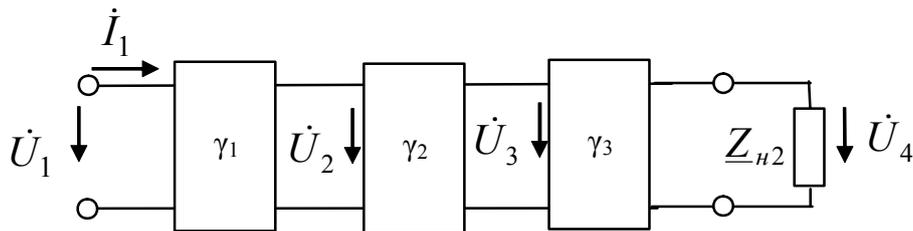


Рис. 7.15

При каскадном соединении симметричных четырехполюсников, которые имеют одинаковое повторное сопротивление, коэффициенты распространения складываются.

$$\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_4} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} \cdot \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_3} \cdot \frac{\dot{U}_3}{\dot{U}_4} = e^{\gamma_1} e^{\gamma_2} e^{\gamma_3} = e^{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3} = e^{\gamma},$$

где $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$.

7.9. Запись уравнений четырехполюсника через вторичные параметры.

Уравнение какой-либо формы четырехполюсника содержит лишь три независимых коэффициента, по которым определяются три вторичных параметра четырехполюсника – характеристические сопротивления входа и выхода \underline{Z}_{c1} и \underline{Z}_{c2} и коэффициент распространения четырехполюсника γ .

Поэтому, решая систему уравнений для вторичных параметров относительно коэффициентов четырехполюсника, можно определить их через вторичные параметры и записать по ним уравнения четырехполюсника.

Для симметричного четырехполюсника, у которого $\underline{Z}_{c1} = \underline{Z}_{c2} = \underline{Z}_{\Pi}$, это проще сделать, используя определение коэффициента распространения

$$\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} = e^{\gamma}, \quad (7.14)$$

гиперболические функции

$$sh\gamma = \frac{1}{2}(e^{\gamma} - e^{-\gamma}); \quad ch\gamma = \frac{1}{2}(e^{\gamma} + e^{-\gamma})$$

и их свойство

$$sh\gamma + ch\gamma = e^{\gamma}.$$

Учитывая, что $\dot{U}_2 = \underline{Z}_{\Pi}\dot{I}_2$, из выражения (7.14) записываем уравнения четырехполюсника через его вторичные параметры.

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 = \dot{U}_2 e^{\gamma} &= \dot{U}_2 ch\gamma + \dot{U}_2 sh\gamma = ch\gamma \dot{U}_2 + \underline{Z}_{\Pi} sh\gamma \dot{I}_2, \\ \dot{I}_1 = \dot{I}_2 e^{\gamma} &= \dot{I}_2 sh\gamma + \dot{I}_2 ch\gamma = \frac{sh\gamma}{\underline{Z}_{\Pi}} \dot{U}_2 + ch\gamma \dot{I}_2. \end{aligned}$$

В матричной форме

$$\begin{pmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ch\gamma & \underline{Z}_{\Pi} sh\gamma \\ \frac{1}{\underline{Z}_{\Pi}} sh\gamma & ch\gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 \end{pmatrix}.$$

Сравнивая последние выражения с уравнениями четырехполюсника формы A , получим:

$$A_{11} = A_{22} = ch\gamma; \quad A_{12} = \underline{Z}_{\Pi} sh\gamma; \quad A_{21} = \frac{sh\gamma}{\underline{Z}_{\Pi}}.$$

Через вторичные параметры можно записать не только уравнение формы A , но и уравнения любой другой формы четырехполюсника.

РАЗДЕЛ 8

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПАССИВНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ФИЛЬТРОВ

Лекция 17

План лекции:

- 8.1. Основные определения и классификация электрических фильтров.
- 8.2. Условие пропускания реактивного фильтра (основное неравенство).
- 8.3. Характеристическое сопротивление фильтра.
- 8.4. Фильтры типа К.

8.1. Основные определения и классификация электрических фильтров.

Частотными электрическими фильтрами называются устройства, предназначенные для разделения электрических колебаний разной частоты. Колебания одних частот фильтр пропускает, других - задерживает.

Под пропусканием понимают прохождение электрических колебаний с небольшим затуханием, а под задержкой - с большим.

Диапазон частот, в пределах которого фильтр пропускает колебания, называется **полосой пропускания фильтра**.

Диапазон частот, в пределах которого фильтр задерживает колебания, называется **полосой затухания**.

Электрические фильтры широко используются в радиотехнических устройствах, аппаратуре связи, автоматике, приборостроении и других устройствах.

Электрический фильтр представляет собой пассивный четырехполюсник (обычно симметричный), нагруженный характеристическим сопротивлением $\underline{Z}_H = \underline{Z}_c$. Теория электрических фильтров основана на общей теории четырехполюсников.

Электрические фильтры могут быть классифицированы таким образом:

1. По частотам, которые пропускаются. В зависимости от пропускаемых частот, фильтры разделяются на:

- фильтры нижних частот (низкочастотные фильтры);
- фильтры верхних частот (высокочастотные фильтры);
- полосовые фильтры;
- заграждающие фильтры.

2. По схемам звеньев (конфигурации фильтров). Фильтры могут состоять из звеньев Г-, Т-, П - образных, мостовых схем и т.п. (рис. 8.1). Фильтры могут быть однозвенными и многозвенными.

3. По характеристикам фильтров. Фильтры типа K (простые), типа m (более сложные) и т.п. Смысл коэффициентов K и m будет дан позднее.

4. По типам элементов, которые используются, фильтры разделяются на:

- реактивные фильтры (состоят только из реактивных элементов L и C);

- безиндуктивные фильтры (состоят из элементов R и C);
- пьезоэлектрические фильтры (состоят из кварцевых пластин).

При рассмотрении фильтров считается, что катушки индуктивности и конденсаторы не имеют потерь, т.е. фильтры состоят из идеализированных схемных элементов.

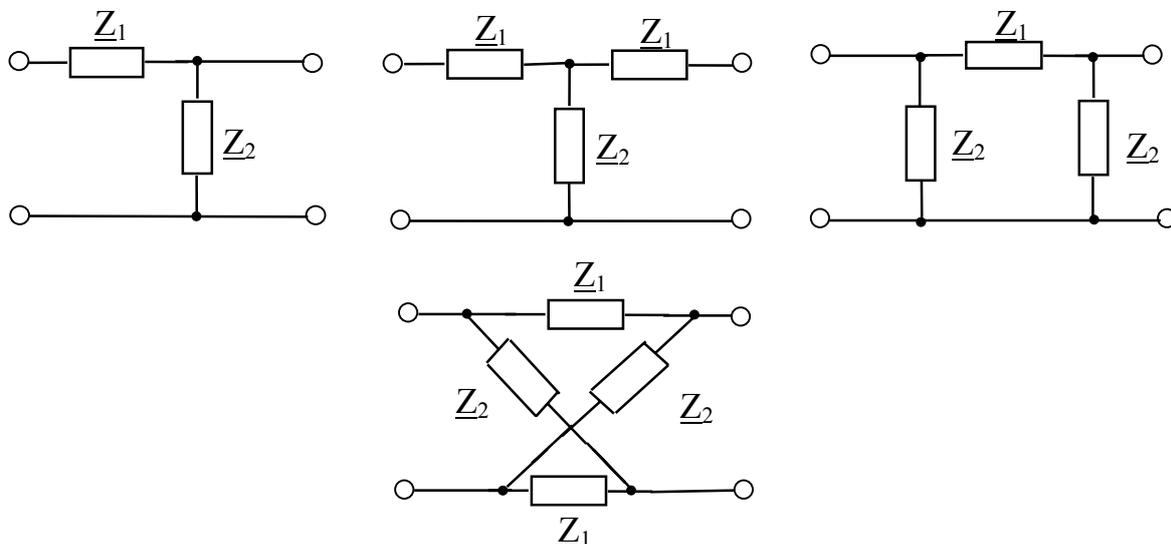


Рис. 8.1

8.2. Условие пропускания реактивного фильтра (основное неравенство).

Ограничимся рассмотрением симметричных LC-фильтров, нагруженных характеристическим сопротивлением $\underline{Z}_H = \underline{Z}_c$ (только при этом условии сохраняются расчетные характеристики фильтра).

Схемы симметричных T- и П-образных фильтров, а также обозначение сопротивлений на них изображены на рис. 8.2.



Рис. 8.2

Принятые на схемах обозначения сопротивлений плеч позволяют получить формулы, одинаковые для T- и П-образных фильтров. Соотношение параметров плеч в T- и П-образных схемах отвечает такому правилу: сопротивления последовательных и параллельных плеч должны быть полными, т.е. равняться \underline{Z}_1 и \underline{Z}_2 . Иначе говоря, в T-образной схеме в последовательных плечах должны быть элементы $L/2$ и $2C$, а в параллельном плече - L и C . В П-образной схеме в последовательном плече - L и C , а в параллельных - $2L$ и $C/2$.

Получим условие, которое определяет полосу пропускания фильтра - так называемое основное неравенство фильтра.

Уравнения формы А симметричного четырехполюсника в гиперболической форме имеют вид:

$$\begin{aligned}\dot{U}_1 &= ch\gamma \cdot \dot{U}_2 + \underline{Z}_\Pi sh\gamma \cdot \dot{I}_2, \\ \dot{I}_1 &= \frac{sh\gamma}{\underline{Z}_\Pi} \cdot \dot{U}_2 + ch\gamma \cdot \dot{I}_2.\end{aligned}$$

Коэффициент

$$A_{11} = ch\gamma = ch(\alpha + j\beta) = ch\alpha \cdot chj\beta + sh\alpha \cdot shj\beta = ch\alpha \cos\beta + jsh\alpha \sin\beta.$$

Результат получен, исходя из выражений:

$$chj\beta = \frac{e^{j\beta} + e^{-j\beta}}{2} = \cos\beta; \quad shj\beta = \frac{e^{j\beta} - e^{-j\beta}}{2} = j \sin\beta.$$

Получим коэффициент A_{11} по опытам холостого хода и короткого замыкания для Г- и П-образных схем фильтра.

При холостом ходе на вторичных зажимах $I_2 = 0$ и первое уравнение формы А имеет вид:

$$\dot{U}_{10} = A_{11} \dot{U}_{20}; \quad \text{отсюда} \quad A_{11} = \frac{\dot{U}_{10}}{\dot{U}_{20}}.$$

Для Г-образной схемы

$$\dot{U}_{20} = \dot{I}_{10} \underline{Z}_2 = \frac{\dot{U}_{10}}{\frac{\underline{Z}_1}{2} + \underline{Z}_2} \cdot \underline{Z}_2 = \frac{\dot{U}_{10}}{1 + \frac{\underline{Z}_1}{2\underline{Z}_2}},$$

откуда $A_{11} = \frac{\dot{U}_{10}}{\dot{U}_{20}} = 1 + \frac{\underline{Z}_1}{2\underline{Z}_2}.$

Для П-образной схемы

$$\dot{U}_{20} = \frac{\dot{U}_{10}}{\underline{Z}_1 + 2\underline{Z}_2} \cdot 2\underline{Z}_2 = \frac{\dot{U}_{10}}{1 + \frac{\underline{Z}_1}{2\underline{Z}_2}},$$

откуда $A_{11} = 1 + \frac{\underline{Z}_1}{2\underline{Z}_2}.$

За счет принятых обозначений сопротивлений плеч выражения для A_{11} получились одинаковыми для Г- и П-образной схемы фильтра.

Сравнивая выражения для A_{11} в гиперболической форме и полученный результат, имеем $ch\alpha \cos\beta + jsh\alpha \sin\beta = 1 + \frac{\underline{Z}_1}{2\underline{Z}_2}.$

Для идеальных реактивных фильтров отношение $\frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}$ является действительной величиной, поэтому $ch\alpha \cos\beta = 1 + \frac{\underline{Z}_1}{2\underline{Z}_2}$, а $sh\alpha \sin\beta = 0.$

В зоне прозрачности $\alpha = 0$ и $ch\alpha = 1$, тогда $\cos \beta = 1 + \frac{\underline{Z}_1}{2\underline{Z}_2}$.

Поскольку $-1 \leq \cos \beta \leq 1$, то $-1 \leq 1 + \frac{\underline{Z}_1}{2\underline{Z}_2} \leq 1$, откуда

$$-1 \leq \frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2} \leq 0 \quad \text{или} \quad 0 \leq 1 + \frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2} \leq 1.$$

Это и есть **основное неравенство реактивных фильтров** (условие пропускания реактивных фильтров), которое выполняется лишь тогда, когда \underline{Z}_1 и \underline{Z}_2 имеют разный знак. Если в последовательном плече включена индуктивность, то в параллельном должна быть включена емкость и наоборот.

Граничные частоты полосы пропускания (частоты среза) определяются из условий

$$\frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2} = -1 \quad \text{и} \quad \frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2} = 0.$$

Частоты среза могут быть получены по частотной характеристике входного сопротивления фильтра, нагруженного согласованным сопротивлением.

8.3. Характеристическое сопротивление фильтра.

Для симметричного четырехполюсника (фильтра) согласованное сопротивление

$$\underline{Z}_c = \underline{Z}_\Pi = \sqrt{\frac{A_{12}}{A_{21}}} = \sqrt{\underline{Z}_0 \cdot \underline{Z}_K}.$$

Определяя для Т- и П-образного фильтра сопротивления холостого хода и короткого замыкания, легко получить выражения для согласованных сопротивлений:

$$\underline{Z}_{cT} = \sqrt{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 \left(1 + \frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2}\right)}, \quad \underline{Z}_{c\Pi} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{1 + \frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2}}}.$$

В полосе пропускания фильтра выражение $\left(1 + \frac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2}\right)$ всегда является действительной положительной величиной; произведение $\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 = X_L X_C$ - также действительная положительная величина. Поэтому в полосе пропускания характеристическое сопротивление активное.

8.4. Фильтры типа К.

Реактивные фильтры, которые удовлетворяют условию $\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 = K^2$ (т.е. произведение комплексных сопротивлений плеч во всем диапазоне частот является постоянной величиной), называются фильтрами типа К.

Учитывая, что сопротивления плеч \underline{Z}_1 и \underline{Z}_2 имеют разный знак (разный характер элементов), то $K^2 = X_1 X_2$ и условие пропускания фильтра принимает вид:

$$1 \geq \frac{K}{2X_2} \geq 0 \quad \text{или} \quad 1 \geq \frac{X_1}{2K} \geq 0.$$

Характеристическое сопротивление для Т- и П-образных схем

$$\underline{Z}_{cT} = K \sqrt{1 - \left(\frac{K}{2X_2}\right)^2} = K \sqrt{1 - \left(\frac{X_1}{2K}\right)^2},$$

$$\underline{Z}_{c\Pi} = \frac{K}{\sqrt{1 - \left(\frac{K}{2X_2}\right)^2}} = \frac{K}{\sqrt{1 - \left(\frac{X_1}{2K}\right)^2}}.$$

На рис. 8.3 - 8.6 изображены схемы фильтров нижних частот, верхних частот, полосовых и заграждающих для Т- и П-образных звеньев, а на рис. 8.7 - 8.10 - их частотные характеристики.



Рис. 8.3. Фильтр низких частот типа K

Характеристики таких фильтров с точки зрения физических процессов легко объяснить на основе поведения сопротивлений емкости, индуктивности, параллельного и последовательного контура в зависимости от частоты.



Рис. 8.4. Фильтр верхних частот типа K

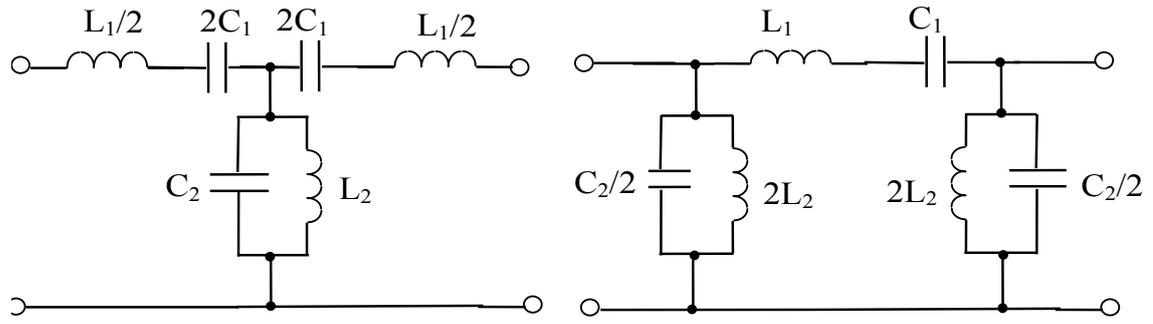


Рис. 8.5. Полосовой фильтр типа K

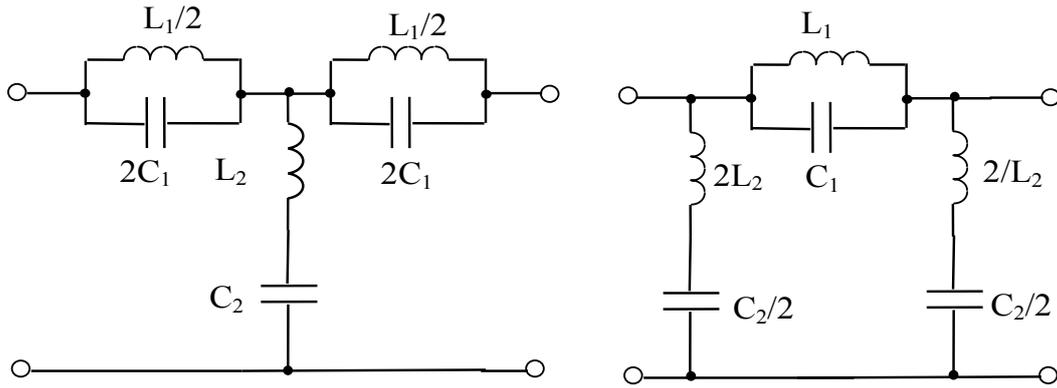


Рис. 8.6. Заграждающий фильтр типа K

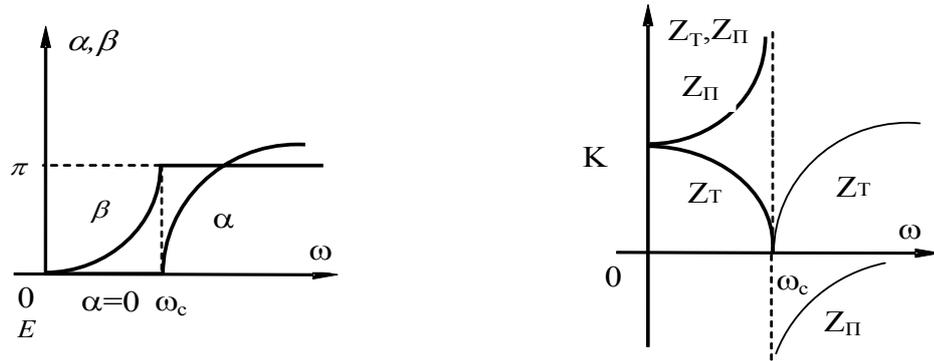


Рис.8.7. Частотные характеристики фильтров низких частот типа K

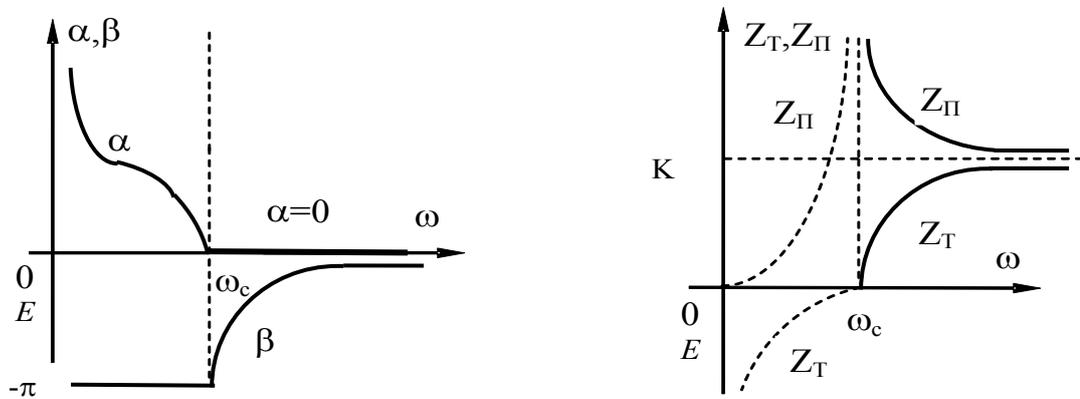


Рис. 8.8. Частотные характеристики фильтра верхних частот типа K

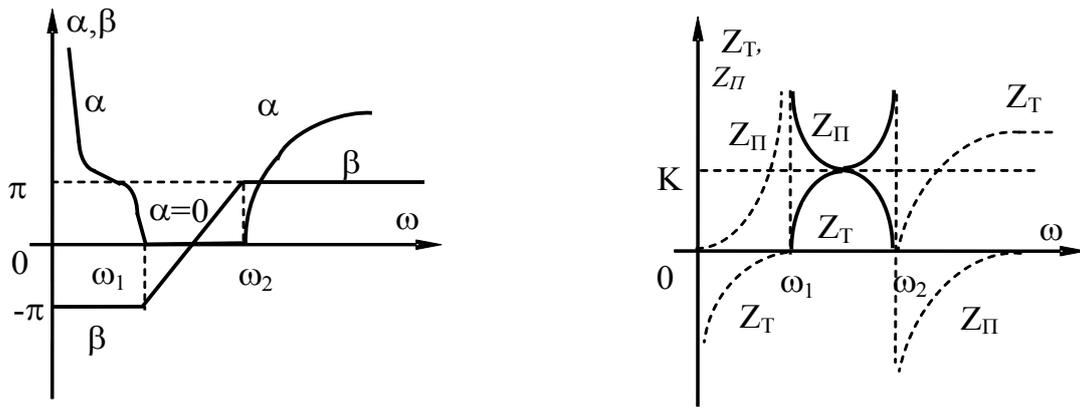


Рис. 8.9. Частотные характеристики полосового фильтра типа K

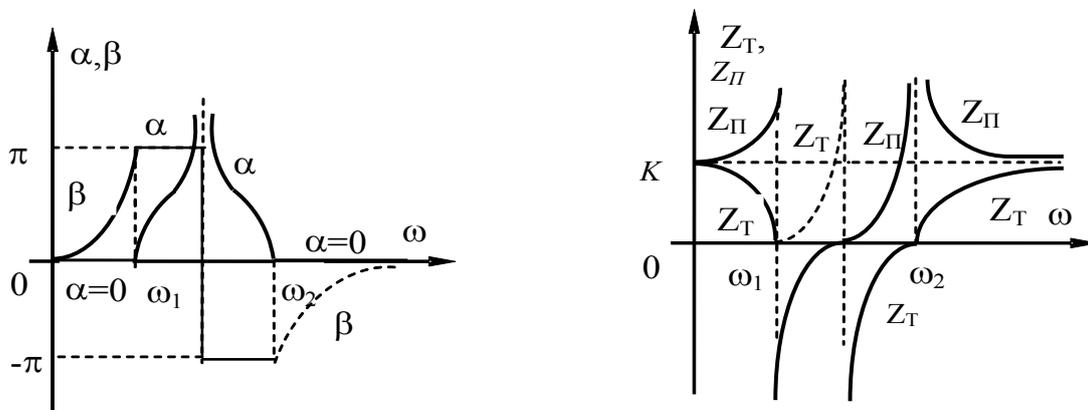


Рис. 8.10. Частотные характеристики заграждающего фильтра типа K

Преимуществом фильтров типа K является их простота, а также рост коэффициента затухания с отдалением от граничной частоты (частоты среза) полосы пропускания.

Недостатки:

1. Резкое изменение характеристического сопротивления в зависимости от частоты в полосе прозрачности, вследствие чего согласование фильтра с нагрузкой осуществляется лишь в ограниченной части полосы пропускания.

2. Недостаточная крутизна нарастания затухания вблизи граничной частоты, что не обеспечивает четкого разделения частот.

Лекция 18

План лекции:

8.5. Фильтр нижних частот типа K .

8.6. Фильтры типа m .

8.7. Другие типы фильтров.

8.5. Фильтр нижних частот типа К.

На примере фильтра нижних частот рассмотрим расчет частоты среза, частотных зависимостей, характеристического сопротивления и параметров фильтра.

Основное неравенство $0 \leq 1 + \frac{Z_1}{4Z_2} \leq 1$ для фильтра нижних частот имеет

вид:

$$0 \leq 1 - \frac{\omega^2 LC}{4} \leq 1.$$

Предельные частоты (частоты среза) получим из выражений:

$$1 - \frac{\omega_1^2 LC}{4} = 1, \quad \text{откуда} \quad \omega_{c1} = 0;$$

$$0 = 1 - \frac{\omega^2 LC}{4}, \quad \text{откуда} \quad \omega_{c2} = \frac{2}{\sqrt{LC}}.$$

Для получения частотных зависимостей рассмотрим соотношение

$$A_{11} = 1 + \frac{Z_1}{2Z_2} = ch\alpha \cdot \cos \beta.$$

Для ФНЧ:
$$A_{11} = 1 + \frac{j\omega L}{2 \frac{1}{j\omega C}} = 1 - \frac{\omega^2 LC}{2} = 1 - 2 \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^2 = ch\alpha \cdot \cos \beta.$$

В зоне прозрачности $\alpha = 0$ и $ch\alpha = 1$, тогда

$$\cos \beta = 1 - 2 \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^2 \quad \text{и} \quad \beta = \arccos \left[1 - 2 \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^2 \right] \quad (8.1)$$

На левой границе полосы пропускания $\omega = 0$ и $\beta = 0$.

На правой границе полосы пропускания $\omega = \omega_c$ и $\beta = \pi$.

В зоне затухания $\alpha \neq 0$ и $sh\alpha \neq 0$, но так как $sh\alpha \cdot \sin \beta = 0$, то $\sin \beta = 0$ и коэффициент фазы может иметь значения $\beta = 0, \pm \pi$. На частоте среза $\beta = \pi$, поэтому во всей зоне затухания $\beta = \pi$, $\cos \beta = -1$ и уравнение

$$ch\alpha \cdot \cos \beta = 1 - 2 \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^2 \quad \text{в зоне затухания принимает вид:}$$

$$-ch\alpha = 1 - 2 \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^2.$$

Отсюда

$$\alpha = \operatorname{arcch} \left[2 \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^2 - 1 \right]. \quad (8.2)$$

По полученным формулам (8.1) и (8.2) строятся зависимости $\alpha(\omega)$ и $\beta(\omega)$ для фильтра нижних частот.

Характеристическое сопротивление фильтра нижних частот:

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{сГ} &= \sqrt{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2 \left(1 + \frac{\underline{Z}_1}{4 \underline{Z}_2} \right)} = \sqrt{j\omega L \cdot \frac{1}{j\omega C} \left(1 - \frac{\omega^2 LC}{4} \right)} = \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^2}, \\ \underline{Z}_{сП} &= \sqrt{\frac{L}{C}} \cdot \sqrt{1 / \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^2 \right]}. \end{aligned}$$

В зоне прозрачности при $\omega < \omega_c$ можно считать, что $Z_c \approx \sqrt{\frac{L}{C}}$. Поэтому согласованное сопротивление нагрузки для фильтра нижних частот $R_H = Z_c = \sqrt{\frac{L}{C}}$.

Для расчета фильтра нижних частот задаются сопротивлением нагрузки R_H и граничной частотой ω_c .

В основе расчета лежат соотношения:

$$\omega_c = \frac{2}{\sqrt{LC}} \quad \text{и} \quad R_H = Z_c = \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Перемножая эти соотношения, получим:

$$\omega_c R_H = \frac{2}{C}, \quad \text{откуда} \quad C = \frac{2}{\omega_c R_H}.$$

Разделив исходные соотношения друг на друга, получим:

$$\frac{\omega_c}{R_H} = \frac{2}{L}, \quad \text{откуда} \quad L = \frac{2R_H}{\omega_c}.$$

Обратим внимание на то, что в реальных фильтрах за счет наличия активных сопротивлений в катушках индуктивности и конденсаторах частотные зависимости немного отличаются от расчетных. Кроме того, расхождение между расчетными и фактическими соотношениями обусловливается нарушением условия $R_H = Z_c$, которое, как видно из графиков $Z_c(\omega)$, делается все более и более несправедливым по мере приближения к граничной частоте.

Желательно было бы создать фильтр, у которого во всей зоне прозрачности $\alpha = 0$, а на граничной частоте $\alpha(\omega)$ переходит в вертикальную линию, т.е. $\alpha(\omega) \rightarrow \infty$.

Крутизну этой зависимости можно увеличить каскадным соединением отдельных фильтров или использованием фильтров типа m .

8.6. Фильтры типа m .

Для улучшения согласования нагрузки с фильтром необходимо, чтобы характеристическое сопротивление фильтра в полосе прозрачности был бы как можно более постоянным.

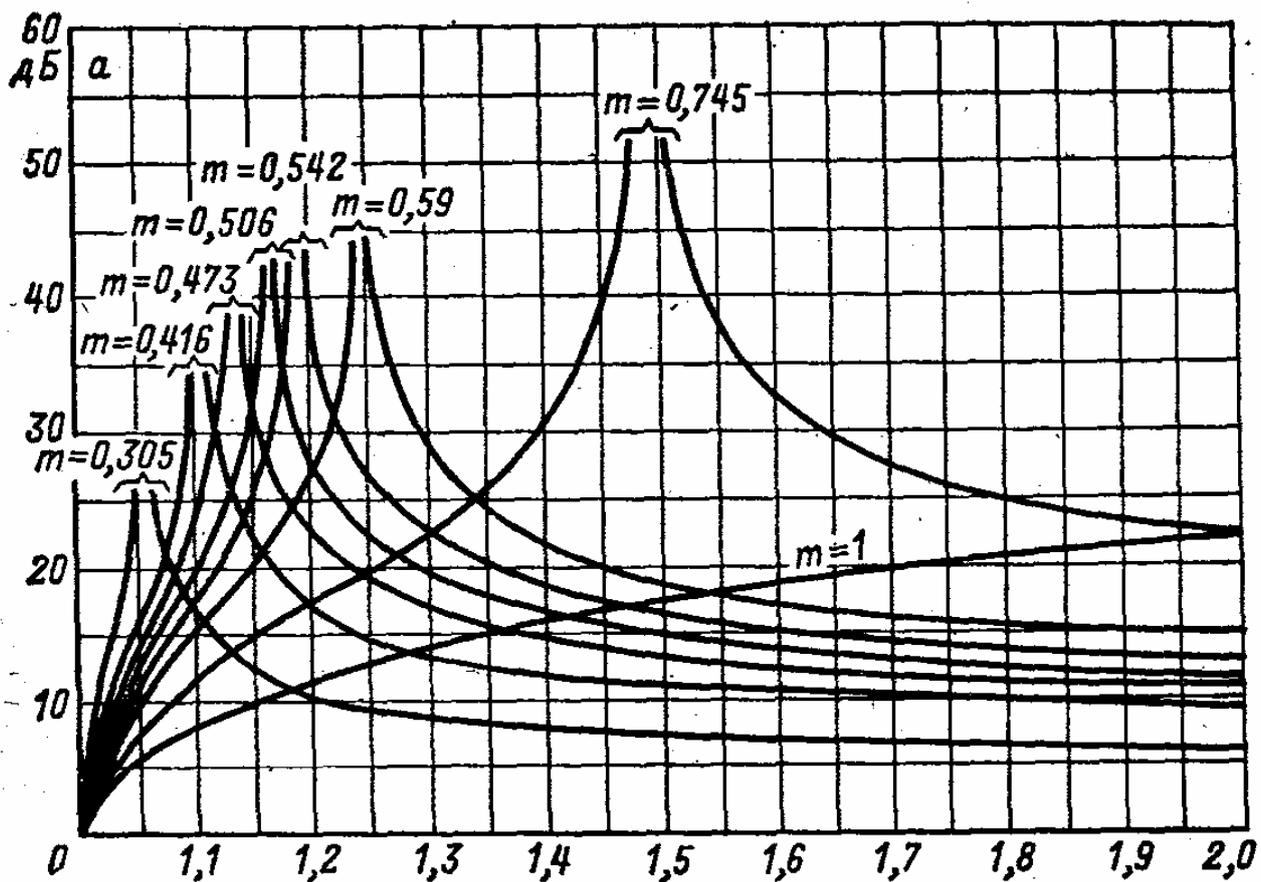
Если часть реактивного сопротивления Γ -образного звена K -фильтра перенести из продольной ветви в поперечную или наоборот, то получим схему нового фильтра, который называют фильтром типа m . Число m находится в пределах $1 \geq m \geq 0$ и определяет ту часть реактивного сопротивления, которая перенесена из одной ветви в другую. Характеристическое сопротивление фильтра типа m не отличается от характеристического сопротивления исходного фильтра K , что позволяет включать их последовательно.

Полосы пропускания, а также частоты среза фильтров типа K и полученных из них фильтров типа m совпадают.

На рис. 8.11 изображены кривые затухания фильтра типа m для разных значений m . При $m = 1$ кривая затухания фильтров m совпадает с характеристикой фильтров типа K .

Чем меньше коэффициент m , тем меньше значение f_∞ (частота, при которой затухание стремится к бесконечности) и круче кривая затухания, однако, предельное значение угасания при этом уменьшается.

На рис. 8.12 приведены кривые зависимости характеристического сопротивления от величины f/f_c для НЧ фильтров и f_c/f - для ВЧ фильтров. Из кривых видно, что при значениях $m \approx 0,6$ характеристическое сопротивление мало изменяется в зависимости от частоты за исключением области, близкой к частоте среза f_c .



$$\sqrt{\frac{Z_1}{4Z_2}} \left(\frac{f}{f_c} \text{ для фильтра НЧ или } \frac{f_c}{f} \text{ для фильтра ВЧ} \right)$$

Рис. 8.11

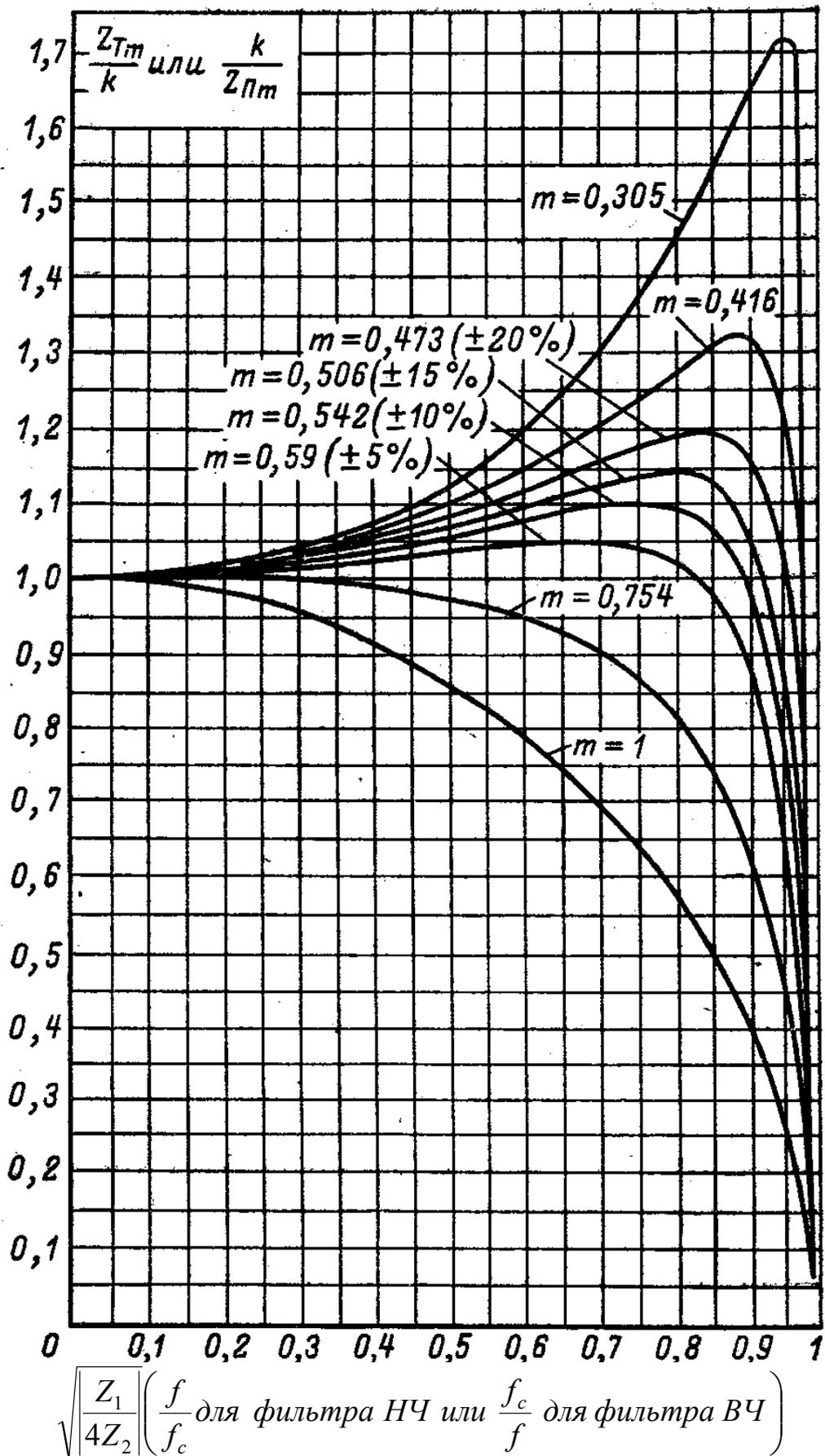


Рис. 8.12

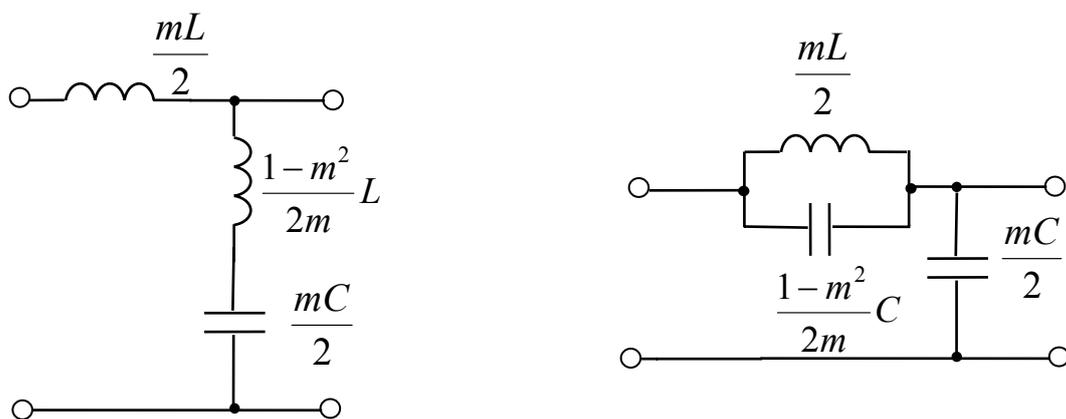


Рис. 8.13. Фильтры нижних частот типа m

На рис. 8.13 и 8.15 изображены схемы Γ -образных фильтров нижних и верхних частот типа m , а на рис. 8.14 и 8.16 - их частотные характеристики.

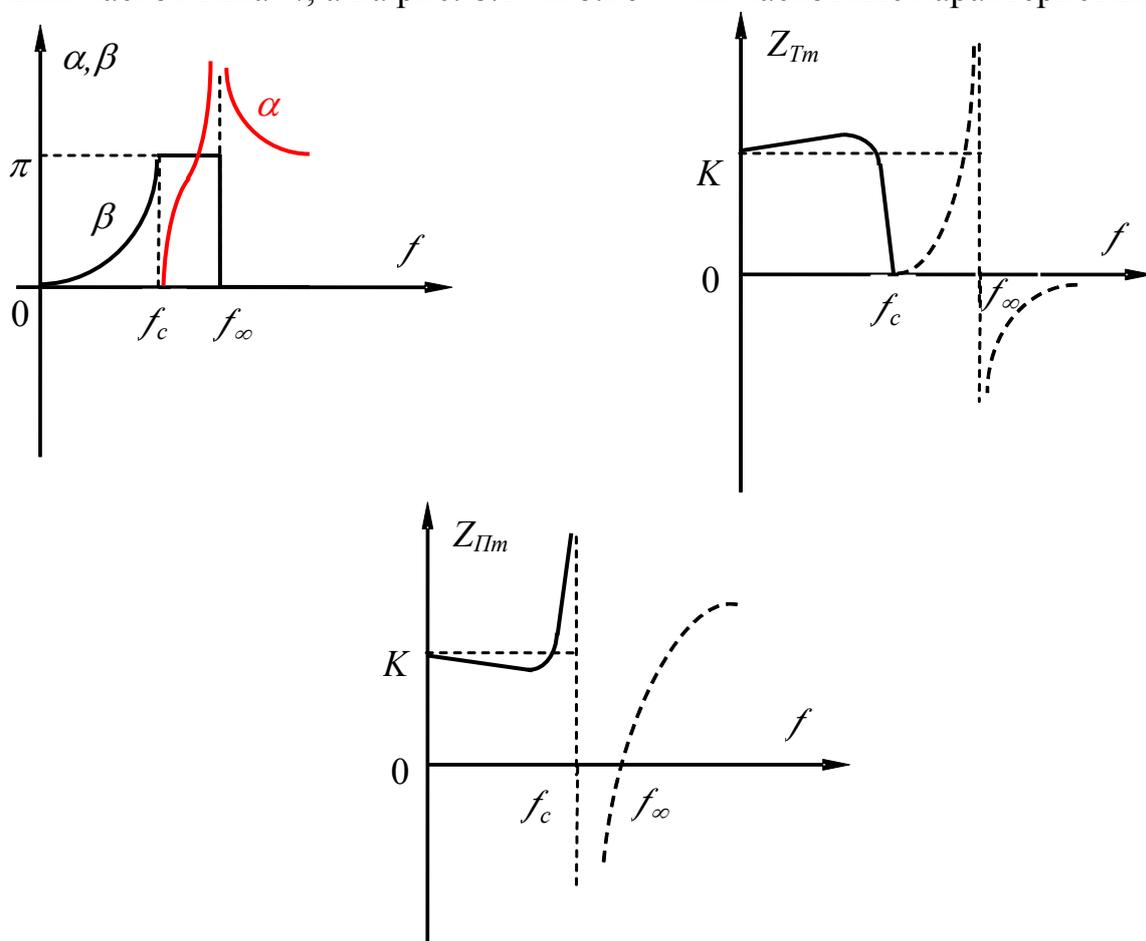


Рис. 8.14. Частотные характеристики фильтра нижних частот типа m

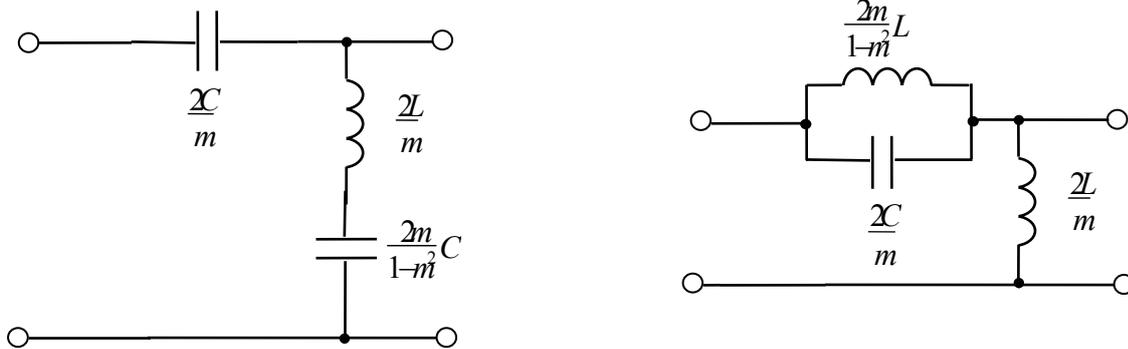


Рис. 8.15. Фильтры верхних частот типа m

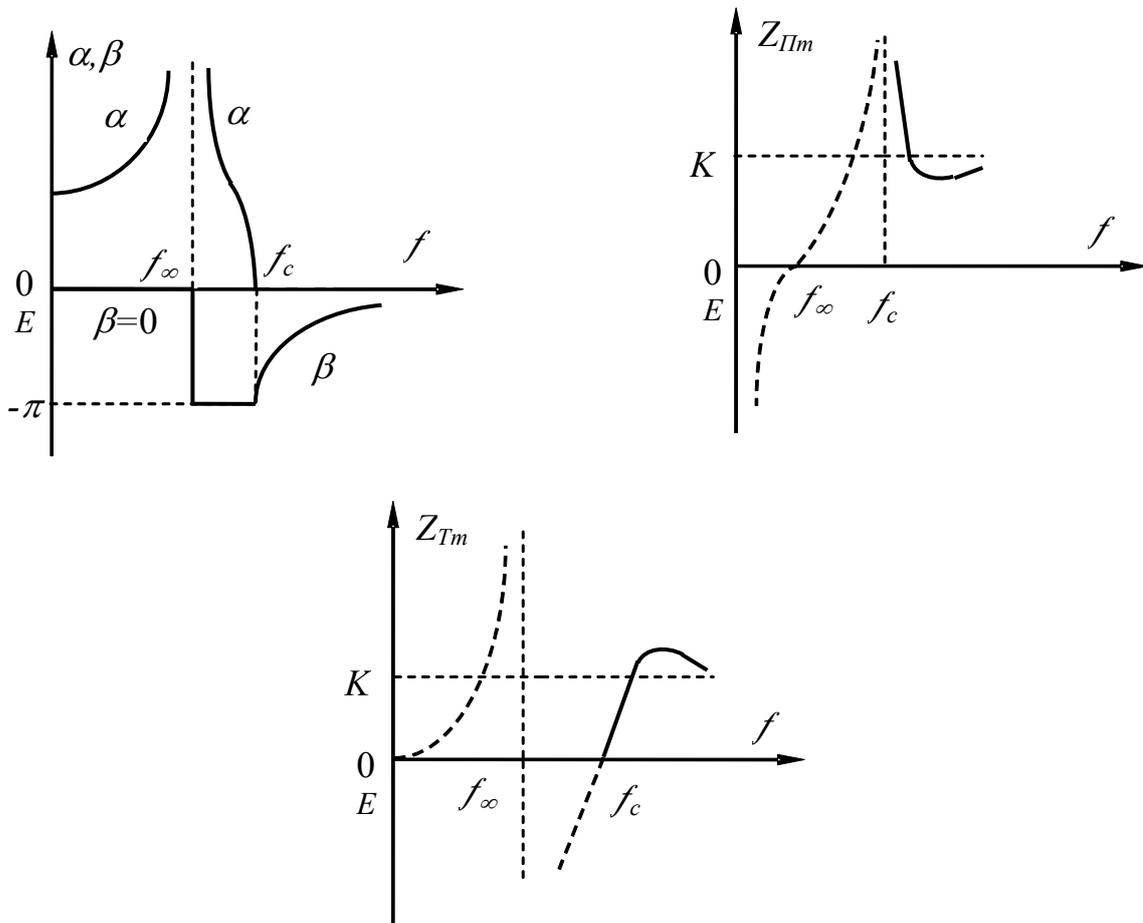


Рис. 8.16. Частотные характеристики фильтра верхних частот типа m

Как видно из частотных характеристик в полосе пропускания фильтры типа m имеют более постоянное характеристическое сопротивление и имеют большую крутизну кривой затухания в сравнении с фильтрами типа K .

Недостатком фильтров типа m есть уменьшение затухания фильтров при $f > f_\infty$ для фильтров нижних частот и $f < f_\infty$ для фильтров верхних частот.

8.7. Другие типы фильтров.

8.7.1. Индуктивно - связанные контура.

В качестве полосовых фильтров широко используются индуктивно-связанные контура (рис. 8.17), которые имеют довольно хорошие частотные характеристики.

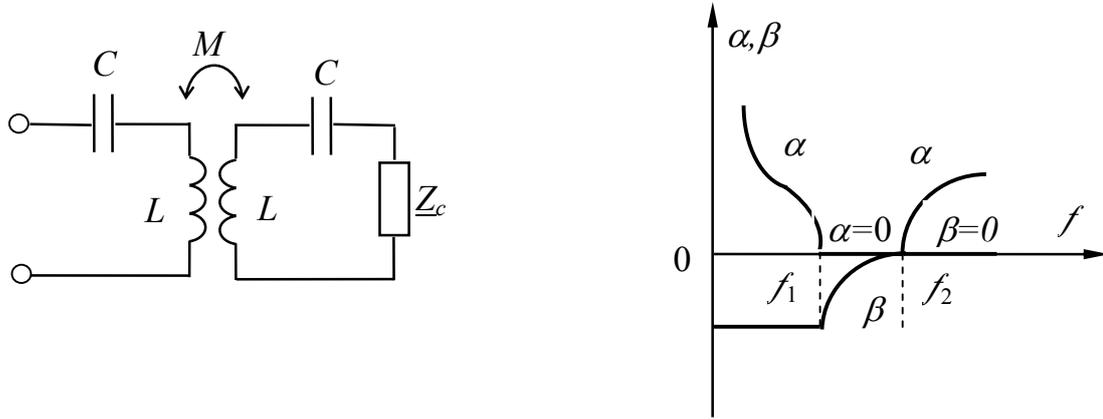


Рис. 8.17. Полосовой фильтр на основе трансформатора и его частотные характеристики

8.7.2. Мостовые фильтры.

Схемы простейших симметричных мостовых реактивных фильтров изображены на рис. 8.18.

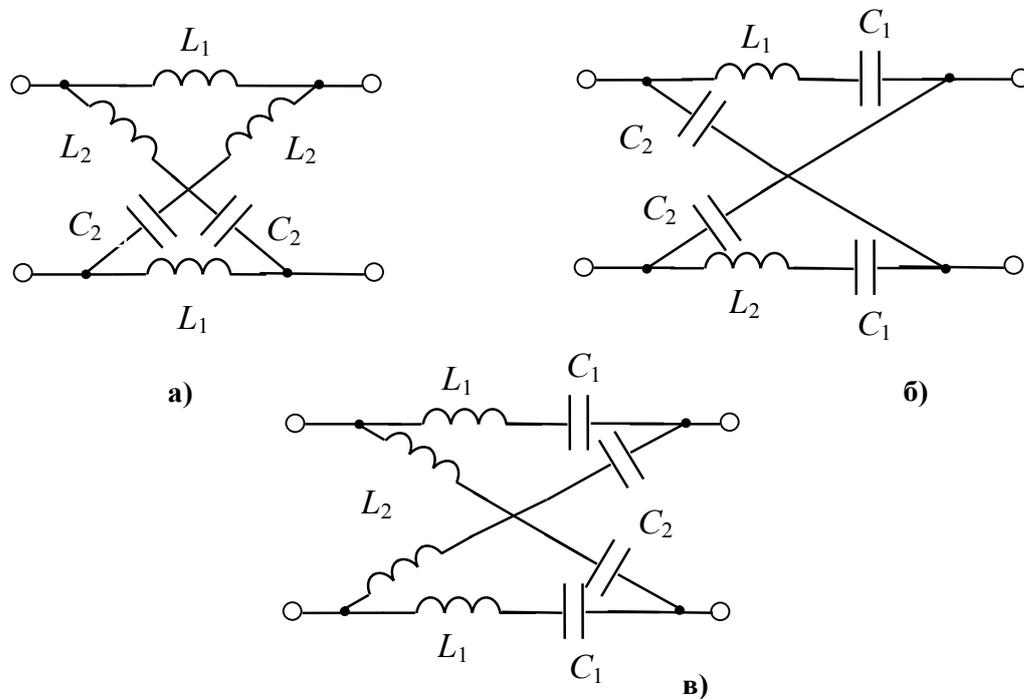


Рис. 8.18. Мостовой фильтр нижних частот (а), верхних частот (б) и полосовой фильтр(в)

Особенностью мостовых схем является то, что характеристическое сопротивление фильтра Z_c и мера передачи γ не имеют жесткой связи и могут выбираться независимо друг от друга.

8.7.3. Пьезоэлектрические фильтры.

Высокие показатели имеют мостовые фильтры, использующие пьезоэлектрические резонаторы, которые представляют собой электромеханическую систему. Она состоит из держателя и пьезоэлектрической пластинки, как правило, кварцевой, на грани которой нанесены электроды. Схематическое изображение и эквивалентная схема пьезоэлектрического резонатора представлены на рис. 8.19, а и б.

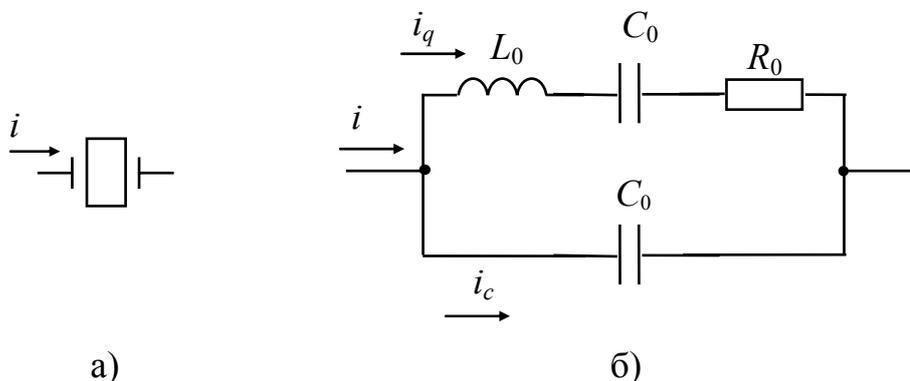


Рис. 8.19. Изображение (а) и схема замещения (б) пьезоэлектрического резонатора

Если к электродам пластинки подвести переменное напряжение, то пластинка будет совершать механические колебания с частотой приложенного напряжения. Через резонатор будет проходить ток i , состоящий из емкостного тока i_c , который протекает через статическую емкость C_0 между электродами, и тока i_q , обусловленного пьезоэлектрическими явлениями в резонаторе. При деформации пластинки за счет пьезоэффекта на ее электродах возникают электрические заряды, которые вызывают ток i_q . Этот ток зависит от частоты колебаний и достигает максимума при максимальной деформации пластинки на резонансной частоте резонатора.

Особенностью кварцевого резонатора является высокая добротность $Q = \frac{\sqrt{L_q/C_q}}{R_q}$, обусловленная механическими свойствами резонатора, которая

составляет от десятков до сотен тысяч единиц.

С помощью таких резонаторов удастся получить полосовые фильтры с узкой полосой пропускания и высокой крутизной кривой затухания вблизи частот среза.

8.7.4. Безиндуктивные RC-фильтры.

Изготовление высокодобротных малогабаритных LC-фильтров особенно в области низких частот связаны с трудностями получения большой индуктивности катушки с малым активным сопротивлением.

Этого недостатка лишены безиндуктивные RC-фильтры, простейшие схемы которых изображены на рис. 8.20.

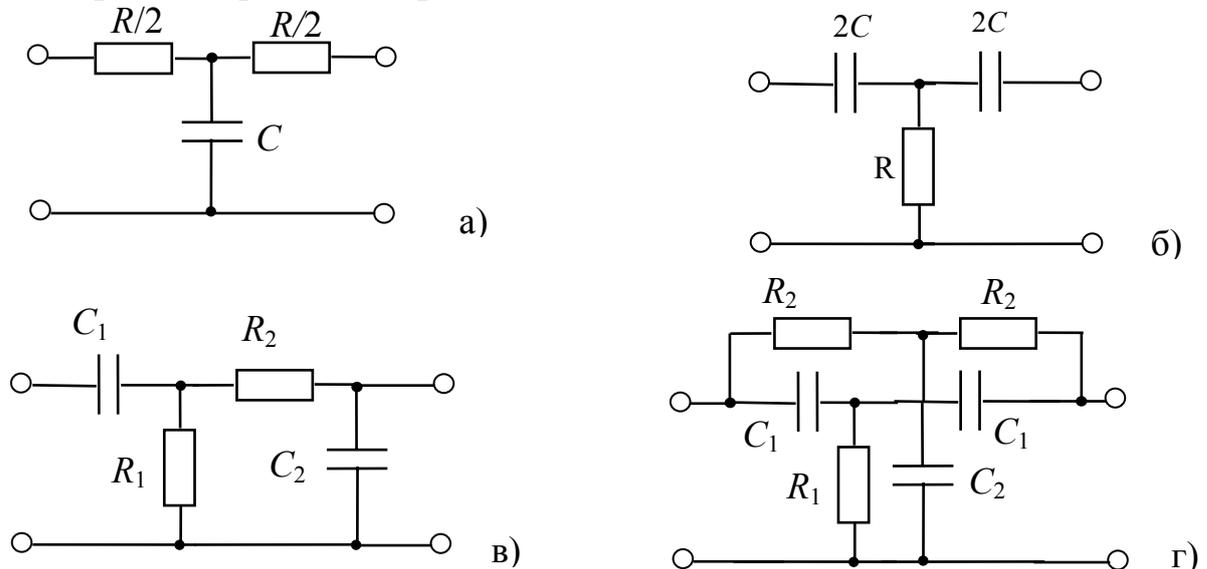


Рис. 8.20. Фильтр НЧ (а); фильтр ВЧ (б); полосовой фильтр (в); заграждающий фильтр (г)

В отличие от реактивных LC-фильтров RC-фильтры не имеют области частот, в пределах которой затухание равняется нулю, что является их важным недостатком. Другим недостатком этих фильтров является малая крутизна кривой затухания. Для улучшения их характеристик используют многосвязные RC-фильтры, однако при этом увеличивается затухание и в полосе пропускания.

8.7.5. Активные RC-фильтры (ARC-фильтры).

Активными называются фильтры, в состав которых кроме пассивных элементов входят также усилительные или невзаимные элементы. Наибольшее распространение получили активные RC-фильтры, которые не содержат индуктивных элементов и могут быть реализованы в виде интегральных микросхем. В таких фильтрах не только отсутствует затухание в полосе пропускания, но, наоборот, имеет место усиление.

Пример схемы активного RC-фильтра нижних частот на основе усилителя с конечным усилением (а) и его нормированная амплитудно-частотная характеристика (б) при разных соотношениях его параметров представлены на рис. 8.21.

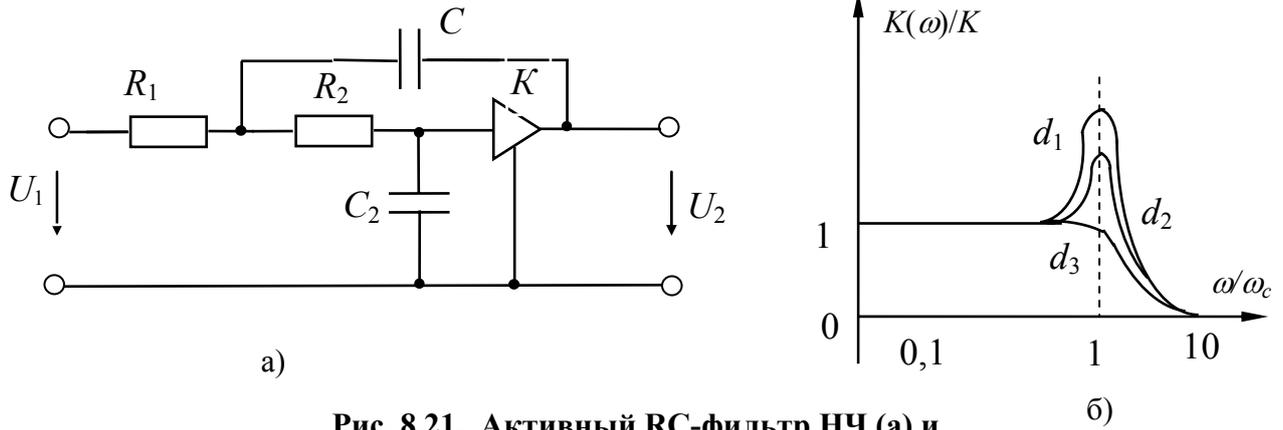


Рис. 8.21. Активный RC-фильтр НЧ (а) и его амплитудно-частотная характеристика (б)

Кроме активных фильтров на основе усилителей с конечным усилением широко используются АРС-фильтры на основе операционных усилителей и преобразователей сопротивления.

Теория активных RC-фильтров есть одним из наиболее перспективных направлений современной радиоэлектроники.

Учебное издание

Теоретические основы электротехники

Часть 1

Тексты лекций

Фесенко Леонид Дмитриевич

Соскова Инна Алексеевна

Ответственный за выпуск: Мосиенко А.Н.

Формат бумаги 60 x 84. Усл.печ. лист – 6,3 Тираж 50 экз.

©Украинская инженерно-педагогическая академия

61003, г. Харьков, ул. Университетская, 16, тел. 733-79-79