Оболенская Т.А., Лазаренко В.И.

ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ АВТОМОДЕЛЬНЫЕ ДВИЖЕНИЯ СПЛОШНЫХ СРЕД

Легко указать общую характеристику задач, для которых имеет место автомодельность. Очевидно, что для автомодельности достаточно, чтобы система размерных определяющих параметров, задаваемая дополнительными условиями и, в частности, краевыми или начальными условиями, содержала бы не более двух постоянных с независимыми размерностями, отличными от длины и времени.

Для автомодельности движения сплошной среды, вообще говоря, необходимо, чтобы в постановке задачи не содержалось характерных линейных и временных величин (клин, конус и т. п.).

Можно рассмотреть автомодельное движение жидкости при погружении клина или конуса с переменно скоростью, зависящей от времени по степенному закону.

Если учитывать весомость жидкости, то необходимо добавить в число определяющих параметров ускорение силы тяжести. Для сохранения автомодельности необходимо, чтобы $[g]=[b]$, т.е. $\delta=+2$. Следовательно, при равномерно ускоренном погружении клина или конуса в несжимаемую весомую жидкость возмущенное движение жидкости будет автомодельно.

Автомодельность движения жидкости со свободными поверхностями сохраняется также и в том случае, когда в начальный момент времени свободная поверхность имеет коническую или клинообразную форму и центр подобия совпадает с острием конуса или клина.

В качестве примера автомодельного решения для упругой среды укажем на задачу Буссинеска о распределении напряжений и деформаций в упругом полупространстве, ограниченном плоскостью, в некоторой точке которой приложена заданная сосредоточенная сила *P*.

В статических задачах упругая среда полностью задается модулем Юнга *E* и коэффициентом Пуассона μ. Внешняя сила задается ее величиной *P* и отвлеченными параметрами, определяющими направление силы.

Возьмем полярные координаты r,θ с началом, совпадающим с точкой приложения силы в плоскости, перпендикулярной к границе и содержащей вектор силы. Система определяющих величин имеет вид

$$P,E,r,\theta,\psi,\mu,\theta_0;$$

θ_0 – угол, задающий наклон силы *P*. Вследствие линейности задачи все напряжения и деформации зависят линейно от *P*, поэтому зависимость от *P* заранее известна; зависимость всех величин от E и r можно найти сразу из соображений размерности. Получаются только две независимые переменные θ и ψ. В случае осевой симметрии (сила *P* перпендикулярна к граничной плоскости) выпадет ψ и поэтому полное решение задачи легко получить с помощью интегрирования одного обыкновенного дифференциального уравнения.

Литература:

Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике – М.: Наука, 1977. - 440 с.