УДК 621.86:539.3

©Оболенская Т.А., Белецкая И.В., Писарцов А.С., Дурдыкулиев А.К.

УСТОЙЧИВОСТЬ СОСТАВНЫХ СТЕРЖНЕЙ, ПРИМЕНЯЕМЫХ В ПОДЪЕМНО-ТРАНСПОРТНОМ ОБОРУДОВАНИИ

1. Актуальность проблемы

Область распространения металлических и композитных конструкций из тонкостенных элементов постоянно расширяется в связи с появлением новых, лёгких и высокопрочных материалов. Несущая способность таких конструкций определяется, как правило, устойчивостью их упругого (иногда и упруго-пластического) равновесия.

Основы теории устойчивости и продольного изгиба были заложены Л. Эйлером. Согласно концепции Эйлера потеря устойчивости выражается в переходе системы к новым формам равновесия, сколь угодно близким к исходной. При этом принимается, что влияние начальных отклонений от номинала несущественно. Перемещения предполагаются происходящими настолько медленно, что инерционные эффекты, связанные с наличием масс, являются несущественными. Появление смежных равновесных форм называют бифуркацией или разветвлением форм равновесия. Такой подход к решению задач устойчивости называют статическим [2].

Эта классическая схема не является универсальной. Можно отметить ещё четыре случая потери устойчивости: появление несмежных форм равновесия, исчезновение устойчивых форм равновесия, полное исчезновение любых форм равновесия, потеря устойчивости при ползучести материала.

2. Постановка задачи

Рассматривая вопросы устойчивости стержней со сплошным поперечным сечением, в основном учитываются деформации изгиба стержня, потерявшего устойчивость, пренебрегая деформациями сжатия и деформациями сдвига. В стержнях, составленных из отдельных ветвей, соединенных между собой какими-то связями (решеткой, планками, шпонками, гвоздями и т. д.) (рис. 1, а, б, в), деформация связей при потере устойчивости создает дополнительную деформативность всей конструкции, что может существенно снизить величину критической нагрузки.

Общая постановка задачи об устойчивости составного стержня дана в работах проф. А.Р. Ржаницына, который делит связи между ветвями на связи сдвига, передающие касательные напряжения, и поперечные связи, передающие нормальные напряжения, действуюшие перпендикулярно оси стержня (рис. 1, г).

3. Основной материал

Для частного случая шарнирно опертого двумя концами стержня, состоящего из двух ветвей, далеко отстоящих друг от друга (жесткость каждой ветви на изгиб мала по сравнению с жесткостью всего поперечного сечения) с жесткими поперечными связями и податливыми связями сдвига (например, изгибаемые, но сохраняющие свою длину планки, рис. 1, б), минимальная критическая сила определяется по следующей формуле:

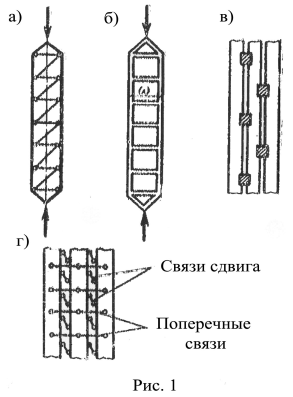

Рис. 1

$$F_{kp}=\frac{\pi^2 EI}{l^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{\pi^2 EI}{l^2}\cdot\frac{1}{\omega^2\xi}}.3\quad F_{kp}=\frac{\pi^2 EI}{l^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{\pi^2 EI}{l^2}\cdot\frac{1}{\omega^2\xi}}\ ,\qquad (1)$$

где EI – жесткость всего сечения;

ω – расстояние между осями ветвей;

ξ – коэффициент жесткости шва на сдвиг;

$$\xi=\frac{T_{c\partial}m}{\delta_{c\partial}}\left(\frac{кг}{см^2}\right);$$

$T_{c\partial}$ – сдвигающее усилие, приходящееся на одну связь;

m – число связей на единицу длины шва;

$\delta_{c\partial}$ – деформация взаимного сдвига смежных волокон по обе стороны разделяющей плоскости шва.

Величина $\frac{1}{\omega^2\xi}$ в этом случае эквивалентна удельному углу сдвига сплошного стержня $\frac{k}{GA}$ (k коэффициент, зависящий от формы поперечного сечения) и при такой замене формула (1) совпадает с приближенной формулой Энгессера, данной им в 1891 г. и учитывающей влияние сдвигов в сплошном стержне:

$$F_{kp}=F_э\frac{1}{1+\frac{k}{GF}\cdot F_э},$$

где $F_э$ – эйлеровская критическая сила при данных граничных условиях.

Формула (1) показывает, что при увеличении жесткости связей критическая сила возрастает и при $\xi\to\infty$ стремится к эйлеровской критической силе для сплошного стержня: при $\xi\to 0$, т. е. при отсутствии связей, получаем $F_{кр}$ = 0, так как в этой формуле жесткость отдельных ветвей на изгиб принята равной нулю.

Решим энергетическим методом задачу об устойчивости стержня, состоящего из двух поясов, соединенных между собой решеткой в виде раскосов и стоек. Пусть, например, это будет колонна, жестко защемленная внизу и свободная вверху (рис. 2).

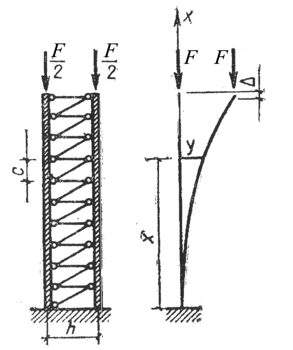

Рис. 2

Рис. 2

До потери устойчивости пояса стержня сжаты, решетка не работает. При потере устойчивости ось стержня изгибается, не меняя своей длины; поперечные сечения стержня поворачиваются, при этом один пояс укорачивается, другой – удлиняется, суммарная работа первоначальных продольных сил в поясах равна нулю. Работу производят дополнительные усилия в поясах, возникающие благодаря изгибу, усилия в элементах решетки, также возникающие при потере устойчивости, и внешняя сила. Следует отметить, что элементы решетки в реальных конструкциях прикрепляются к поясам какими-то более или менее податливыми связями (заклепки, болты и т. д.). Деформативность этих связей также может влиять на величину критической нагрузки. В данном случае этих деформаций мы не учитываем.

Задаемся упругой линией в форме

$$y = a\left(1 - \cos\frac{\pi x}{2l}\right),$$

которая удовлетворяет граничным условиям:

при $x = 0$ $y = 0$, $y' = 0$;

при $x = l$ $y \neq 0$, $y' \neq 0$, $y'' = 0$.

Опускание верхней точки колонны

$$\Delta = \frac{1}{2}\int_0^l (y')^2 \cdot dx = \frac{a^2\pi^2}{8l^2}\int_0^l \sin^2\frac{\pi x}{2l} \cdot dx = \frac{a^2\pi^2}{8l^2} \cdot \frac{2l}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{a^2\pi^2}{16l}.$$

Работа внешней силы на перемещениях их криволинейного состояния в прямолинейное

$$W = -F \cdot \Delta = -F\frac{a^2\pi^2}{16l}.$$

Работу внутренних сил найдем как работу продольных сил, пренебрегая изгибом каждой панели пояса в отдельности:

$$W=\sum_n \frac{N_n^2 c}{2EA_i}+\sum_c \frac{N_c^2 h}{2EA_i}+\sum_p \frac{N_p^2 d}{2EA_i},$$

где первая сумма относится к поясам, вторая – к стойкам и третья – к раскосам;

c – длина панели пояса;

h – длина стойки;

d – длина раскоса.

Усилие в каждой панели пояса определяется, как момент относительно соответствующей моментной точки, деленный на расстояние между поясами h

$$M=F(a-y)=Fa\cos\frac{\pi x}{2l};$$

$$N_n=\frac{M}{h}=F\frac{a}{h}\cos\frac{\pi x}{2l}.$$

Решетка воспринимает перерезывающую силу. Усилия в стойках и в раскосах равны:

$$N_c=\pm Q=\pm\frac{dM}{dx}=\pm\frac{Fa\pi}{2l}\cdot\sin\frac{\pi x}{2l};$$

$$N_p=\pm Q\frac{d}{h}=\pm\frac{Fa\pi}{2l}\cdot\frac{d}{h}\cdot\sin\frac{\pi x}{2l}.$$

Таким образом, суммарная работа внутренних сил

$$W=\sum_n F^2\cdot\frac{a^2}{h^2}\cos^2\frac{\pi x}{2l}\cdot\frac{c}{2EA_i}+\sum_c\frac{F^2a^2\pi^2}{4l^2}\sin^2\frac{\pi x}{2l}\cdot\frac{h}{2EA_i}+\sum_p\frac{F^2a^2\pi^2}{8l^2}\cdot\frac{d^3}{h^2}\sin^2\frac{\pi x}{2l}\cdot\frac{1}{EA_i}.$$

Приравняв нулю сумму работ внешних и внутренних сил, получаем

$$F_{kp}=\frac{\dfrac{\pi^2E}{2l}}{\dfrac{4c}{h^2}\sum_n\dfrac{1}{A_i}\cos^2\dfrac{\pi x}{2l}+\dfrac{\pi^2h}{l^2}\sum_c\dfrac{1}{A_i}\sin^2\dfrac{\pi x}{2l}+\dfrac{\pi^2d^3}{l^2h^2}\sum_p\dfrac{1}{A_i}\sin^2\dfrac{\pi x}{2l}}, \qquad (2)$$

здесь x – координата моментной точки, соответствующей определению усилия в поясе каждой панели.

Формула (2) показывает, что деформативность решетки уменьшает критическую силу. Если площади раскосов или стоек стремятся к нулю (т. е. отсутствуют либо связи сдвига, либо поперечные связи), критическая сила составного стержня с пренебрежимо малой жесткостью отдельной ветви на изгиб стремится к нулю. Если увеличить жесткость решетки, критическая сила возрастает и при $A^i{}_c\to\infty$ и $A^i{}_p\to\infty$

$$F_{kp}=\frac{\pi^2Eh^2}{8lc\sum_n\dfrac{1}{A_i}\cos^2\dfrac{\pi x}{2l}};$$

что при постоянном сечении поясов равно:

$$F_{kp}=\frac{\pi^2EI}{4l^2},$$

где $I = \dfrac{1}{2} A h^2$ – момент инерции монолитного стержня, состоящего из двух поясов с общей площадью $2A$.

Если сечение поясов, стоек и раскосов не меняются по длине стержня, то формулу (2) удобно преобразовать следующим образом: вынося из-под знака суммы постоянные площади и учитывая, что $\dfrac{1}{2} A_n h^2 = I$

$$F_{kp} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2} \cdot \frac{1}{\dfrac{2c}{l} \cdot \sum \cos^2 \dfrac{\pi x}{2l} + \dfrac{\pi^2 I}{l^2} \left[\dfrac{h}{2lA_c} \sum \sin^2 \dfrac{\pi x}{2l} + \dfrac{d^3}{2lh^2 A_p} \sum \sin^2 \dfrac{\pi x}{2l} \right]}.$$

Под знаком каждой суммы в знаменателе стоит столько членов, сколько панелей длиной *c* имеется в составном стержне; разделим все члены в знаменателе на *c*, помножим на *dx* и заменим суммирование интегрированием.

При этом

$$\int_0^l \sin^2 \frac{\pi x}{2l} dx = \int_0^l \cos^2 \frac{\pi x}{2l} \cdot dx = \frac{2l}{\pi} \left[\pm \frac{1}{4} \sin \frac{\pi x}{l} + \frac{\pi x}{4l} \right] \Bigg|_0^l = \frac{l}{2}.$$

Введя обозначение

$$F_э = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2} .3 \quad F_э = \frac{\pi^2 EI}{(\mu l)^2} ,$$

где μ – коэффициент свободной длины, получаем формулу, действительную при любых граничных условиях:

$$F_{kp} = F_э \frac{1}{1 + \dfrac{F_э}{E} \left[\dfrac{1}{A_c tg\alpha} + \dfrac{1}{A_p \sin\alpha \cos^2 \alpha} \right]},$$

здесь α – угол между направлениями раскоса и стойки;

$F_э$ – критическая сила монолитного стержня;

A_c – площадь сечения стойки;

A_p – площадь сечения раскоса.

Выводы

Анализируя выше сказанное можно сделать вывод, что деформативность решетки уменьшает критическую силу. Если площади раскосов или стоек стремятся к нулю, т.е отсутствуют либо связи сдвига, либо поперечные связи, критическая сила составного стержня с пренебрежимо малой жесткостью отдельной ветви на изгиб стремится к нулю, при увеличении жесткость решетки, критическая сила возрастает.

Список использованных источников:

1. Багмутов, В. П. Элементы расчетов на устойчивость : учеб. пособие / В. П. Багмутов, А. А. Белов, А. С. Столярчук. – Волгоград : ИУНЛ ВолгГТУ, 2010. – 56 с.

2. Власов В. З. Тонкостенные упругие стержни / В. З. Власов. – М. : Физматгиз, 1959. – 568 с.

Оболенская Т.А., Белецкая И.В., Писарцов А.С., Дурдыкулиев А.К. «Устойчивость составных стержней, применяемых в подъемно-транспортном оборудовании».

В статье рассматривается задача об устойчивости стержня, состоящего из двух поясов, соединенных между собой решеткой в виде раскосов и стоек.

Ключевые слова: критическая сила, устойчивость, работа.

Оболенська Т.О., Білецька І.В, Писарцов О.С., Дурдикулієв А.К. «Стійкість складових стрижнів застосовуваних в підйомно-транспортному устаткуванні».

У статті розглядається задача про стійкість стрижня, що складається з двох поясів, з'єднаних між собою решіткою у вигляді розкосів і стійок.

Ключові слова: критична сила, стійкість, робота.

Obolenskaya T.A., Beletskaya I.V., Pisartsov A.S., Durdykuliev A.K. “The stability of composite rods used in Lifting and transporting equipment”.

In the article the problem of the stability of the rod, which consists of two zones, connected by a lattice in the form of braces and struts are examined.

Key words: critical power, stability, and work.

Стаття надійшла до редакції 2 квітня 2013 р.