

## **КРАЙОВА ЗАДАЧА ПОЗДОВЖНИХ КОЛИВАНЬ В КАНАТАХ ЗМІННОЇ ДОВЖИНИ**

### **1. Вступ**

Одними з відповідальних технологічних об'єктів вугільних та рудничних шахт є підйомні установки. Від їхньої працездатності залежить нормальне функціонування та безпека роботи всієї шахти в цілому.

Метою роботи є дослідження динамічних процесів, які відбуваються при підніманні вантажу, і виявлення найбільш критичних моментів напруження головного канату. Актуальність роботи зумовлена необхідністю постійного підтримання безпеки та надійності роботи шахтних підйомних установок.

Незважаючи на досить велику кількість робіт досліджень в цій області, проведених для стаціонарних установок, ряд завдань, характерних для дослідження напружень в перетинах канату за допомогою модифікованого методу продовження, на цей час не мають явного розв'язку.

Оскільки ці проблеми досить нові, є потреба розробити метод для вирішення такого роду завдань. У нашій статті задача про поздовжні коливання сталевих канатів змінної довжини приводиться до розв'язку одновимірного хвильового рівняння на інтервалі із змінною границею. А зміна в часі довжини інтервалу викликано силою, що діє в верхньому перетині каната, в точці дотику з барабаном. Представлення рівняння руху каната у формі хвильового рівняння з початково-крайовими умовами першого роду і змішаного типу приводять нас до використання модифікованого методу продовження і відображення, оскільки дозволяють враховувати характер відображених і залишкових хвиль від рухомого кінця. З цього випливає, що ми можемо досліджувати показники напружень в різних перетинах каната в певний момент часу, і спостерігати поведінку кривої напруження за весь період роботи системи.

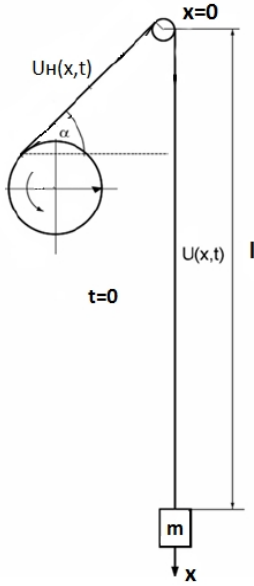
### **2. Фізична постановка задачі**

Дана робота присвячена задачі обчислення динамічного поля переміщень і напруг у сталевих канатах змінної довжини шахтних піднімальних механізмів; канати є врівноваженими, і головний канат переносить зосереджене навантаження вгору, яке до початку руху системи знаходиться на нижньому кінці головного каната (рис. 1).

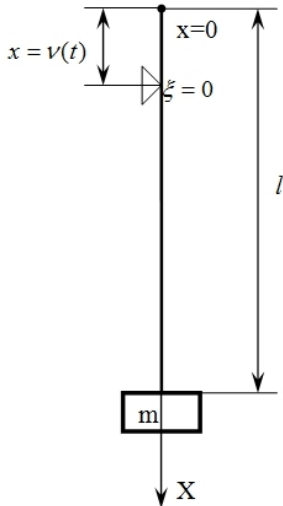
Розглянемо випадок одновантажної підйомної установки з одним головним канатом, причому до початку намотування вантаж вже був підвішений і закріплений до нижнього кінця, який буде вважати нерухомим у рухомій системі координат (рис. 2). Тоді, відповідно, верхній кінець головного каната (точка дотику каната з барабаном) буде змінною границею, і змінюватись за певним наперед заданим законом.

Надалі в нашій задачі ми будемо розглядати тільки частину установки: головний канат і закріплений на нижньому кінці вантаж. І будемо шукати переміщення та напруження

в перетинах каната на різних режимах роботи системи.



**Рис. 1**



**Рис. 2**

Перед початком руху канат не провисає, встановилися статичні переміщення  $u(\xi)$  та напруження  $\sigma(\xi)$ , де  $\xi$  – вісь, яка направлена вниз, вздовж канату;  $\xi = 0$  – точка дотику каната з барабаном.

Канат розглядається як пружна нитка, тобто напруження вигину в канаті набагато менше, ніж напруження розтягу нитки (тому першим можна знехтувати). Канат намотується на барабан радіусом  $R$ . Так, як напруження вигину не враховується, канат можна вважати прямолінійним. Додатнім напрямом пружних переміщень в канаті, які позначені  $u(x,t)$ , будемо вважати співпадаючим з додатнім напрямом вісі  $\xi$ . Таким чином, у відносному русі розглядається частина системи, яка представляє собою стержень початкової довжини  $l$ , обмежений на інтервалі  $0 < x \leq l$ , причому точка  $x = 0$  рухається за законом

$$v(t) = R \int_0^t \int_0^s \beta(\tau) d\tau ds + R\omega(0)t + v(0),$$

де  $R$  – середній радіус намотки каната на барабан;  $\beta(t)$  – кутове прискорення барабана;  
 $\omega(t)$  – кутова швидкість;  
 $S$  – площа поперечного перетину каната.

### 3. Математична модель та розв’язок задачі

Розглянемо підзадачу, в якій будемо представляти канат як пружний стержень, та знайдемо розв’язок наступної крайової задачі у відносній системі координат:

в області  $0 + v(t) < x < l, \quad t > 0$  знайти розв’язок хвильового рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

де  $a$  – швидкість звуку в сталевому канаті;  
задовольняє наступним початковим умовам

$$u(x,0) = 0; \quad u_t(x,0) = 0; \quad 0 < x < l \quad (2)$$

та крайовим умовам

$$u(l,t) = 0; \quad u(v(t),t) = \mu(t); \quad t > 0. \quad (3)$$

При  $t = 0$  довжина пружної сталевий нитки (канат) дорівнює  $l$ , при  $t > 0$  незакріплений кінець даного інтервалу представляємо функцією  $x = v(t)$ ,  $v(0) = 0$ .

Розв’язок шукаємо у вигляді

$$u(x,t) = \chi(x - at) + \chi(x + at).$$

Так як, один кінець закріплений, то

$$u(x,t) = \chi(x - at). \quad (4)$$

Побудуємо продовження функції  $\mu(t)$  на всю вісь  $t$

$$\tilde{\mu}(t) = \begin{cases} \mu(t), & t \geq 0 \\ 0, & t < 0. \end{cases} \quad (5)$$

Враховуючи продовження (5) та другу крайову умову (3), підставляємо у форму розв’язку (4)

$$\chi(v(t) - at) = \tilde{\mu}(t). \quad (6)$$

Виконаємо заміну

$$z = v(t) - at. \quad (7)$$

Будемо вважати, що функція  $v(t)$  неперервно диференційовна при  $t > 0$ , тоді

$$v(t) - at < 0, \quad v(t) < at, \quad \left| \frac{dv}{dt} \right| < a, \quad |v'(t)| < a, \quad (v(t) - at)' = \frac{dv}{dt} - a < 0.$$

Для того, щоб дана задача була розв’язною, необхідно існування оберненої функції  $t_0(z)$  до перетворення  $z$ . Прийmemo, що поздовжні хвилі в пружному сталевому канаті розповсюджуються з дозвуковою швидкістю, і тоді функція  $t_0(z)$  буде монотонно спадною по відношенню до  $z$ .

Застосовуючи метод продовження, будемо продовження на всю вісь  $z$  функції  $t_0(z)$

$$t_0(z) = \begin{cases} < 0, & z > 0, \\ = 0, & z = 0, \\ > 0, & z < 0. \end{cases}$$

$$z \equiv v(t_0(z)) - at_0(z),$$

$$t \equiv t_0(v(t) - at). \quad (8)$$

$$\mu(t_0(z)) = \chi(z).$$

Враховуючи властивості оберненої функції, побудуємо продовження для функції  $\tilde{\mu}(t)$

$$\tilde{\mu}(t_0(x - at)) = \tilde{\mu}(t) = \begin{cases} \mu(t), & t > 0, \quad x - at < 0, \quad t > \frac{x}{a}, \quad x < at; \\ 0, & t < 0, \quad x - at > 0, \quad t < \frac{x}{a}, \quad x > at. \end{cases}$$

Функція

$$u(x, t) = \tilde{\mu}(t_0(x - at)) = \tilde{\mu}(t) = \mu(t)$$

при  $t > 0$  та  $t < \frac{l}{a}$  є розв'язком рівняння (1). Для того, щоб функція  $u(x, t)$  задовольняла всім початковим та крайовим умовам в постановці задачі на більшому інтервалі, розглянемо суперпозицію хвиль, що випромінюються рухомим кінцем, та відображеної від нерухомого кінця

$$u(x, t) = \tilde{\mu}(t_0(x - at)) - \tilde{\mu}(t_0(2l - (x + at))). \quad (9)$$

При  $0 < t < \frac{2l - v(t)}{a}$  функція (9) є розв'язок рівняння (1), і задовольняє початковим умовам (2) та крайовим умовам (3).

При  $t > \frac{2l - v(t)}{a}$  в функцію (9) вводимо третій доданок  $\tilde{\mu}(t_0(x - at - (3l - 2v(t))))$ , як додаткову функцію. Однак, остання функція не задовольняє рівнянню (1), оскільки  $x = 3l - 2v(t)$  є рухомою точкою, отже джерело не миттєве, і в розв'язок вносяться деякі уточнення.

Для того, щоб знайти розв'язок задачі на більшому інтервалі методом продовження, потрібно відшукати найменший додатній корінь  $\tau_1$  для рівняння  $at = 2l - v(t)$ . І так, в області  $t > \tau_1$ ,  $0 < x < v(t)$  знайти розв'язок рівняння (1), яке задовольняє відповідно таким початковим та крайовим умовам:

$$u(x, \tau_1) = 0; \quad u_t(x, \tau_1) = 0; \quad 0 < x < v(\tau_1), \quad (10)$$

$$u(l, t) = 0; \quad u(v(t), t) = f(t); \quad t > \tau_1, \quad (11)$$

де

$$f(t) = \tilde{\mu}(t_0(2l - v(t) - at)). \quad (12)$$

Продовження функції  $f(t)$  на всю вісь  $t$  побудуємо таким чином

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f(t), & t > \tau_1, \\ 0, & t < \tau_1. \end{cases} \quad (13)$$

Далі, аналогічно до побудови розв'язку на попередніх інтервалах будемо мати:

$$u(x,t) = \chi(x-at), \quad \chi(v(t)-at) = \tilde{f}(t), \quad \chi(z) = \tilde{f}(t_0(z)).$$

Тоді розв'язок допоміжної задачі запишемо так

$$u(x,t) = \tilde{f}(t_0(x-at)). \quad (14)$$

Очевидно, що для всіх  $x$ , що задовольняють  $0 < x < v(t)$ , буде справедливою нерівність  $x-at < x < v(t)-at$ , та в силу строго монотонного спадання функції  $t_0(z)$  та властивостей її продовження на всю вісь  $t$ , буде справедливим наступне співвідношення

$$t_0(x-at) < t_0(v(t)-at) = t.$$

Для  $t > \tau_1$ , очевидно, справедливим буде нерівність

$$at < 2l - v(t),$$

або

$$at + v(t) - l < l.$$

Враховуючи вище попередньо представлені нерівності, функцію (14) можна записати у еквівалентному вигляді

$$u(x,t) = \tilde{\mu}(t_0(2l - v(t_0(x-at) - at_0(x-at)))).$$

Тоді

$$\begin{aligned} u(x,t) = & \tilde{\mu}(t_0(x-at)) - \tilde{\mu}(t_0(2l - (x+at))) + \\ & + \tilde{\mu}(t_0(2l - v(t_0(x-at) - at_0(x-at)))) - \\ & - \tilde{\mu}(t_0(2l - v(t_0(2l - (x+at)) - at_0(2l - (x+at)))) \end{aligned} \quad (15)$$

буде розв'язком рівняння (1), та задовольняти початковим умовам (2) та крайовим умовам (3) при

$$t < \frac{4l - v(t) - 2v(\tau_1)}{a}. \quad (16)$$

Повернемося до побудови відображених хвиль за рис. (2). Використовуючи метод продовження відображених хвиль, як показано в попередньому пункті, знайдемо розв'язок рівняння (1) з врахуванням крайових умов в точці намотки на барабан, тобто, використовуючи принцип суперпозиції представимо розв'язок даної задачі у вигляді суми функцій:

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t) + u_3(x,t), \quad (17)$$

причому функція  $u_1(x,t)$  визначається виразом (17).

Кожна з функцій  $u_i(x,t)$  повинна в області  $v(t) < x < l$ ,  $t > 0$  задовольняти хвильовому рівнянню (1). Функція  $u_2(x,t)$  також задовольняє відповідно початковим та крайовим умовам

$$u(x,0) = 0; \quad u_t(x,0) = 0; \quad 0 < x < l; \quad (18)$$

$$u(v(t),t) = -\tilde{u}(v(t)); \quad u_x(l,t) = 0; \quad t > 0,$$

де  $\tilde{u}(x) = \frac{G}{ES}x + \frac{\lg x}{a^2} - \frac{gx^2}{2a^2}$  – частинний розв'язок крайової задачі про пружні

переміщення точок канату у відносному русі;  $G = mg$ ,  $E$  – модуль пружності першого роду.

Отже, неоднорідні крайові умови для функції  $u_2(x, t)$  враховують той факт, що в

$$u(\xi) = \frac{G}{ES} \xi + \frac{\lg \xi}{a^2} - \frac{g \xi^2}{2a^2}.$$

канаті існують переміщення  $\tilde{u}(v(t))$ , створені функцією

Функція  $u_3(x, t)$  повинна задовольняти початковим умовам (18) та крайовим умовам

$$u(v(t), t) = 0; \quad u_x(l, t) = \gamma \left( -R\beta(t) + \frac{\partial^2 u_1(l, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u_2(l, t)}{\partial t^2} \right) H(t), \quad t > 0,$$

де  $H(t)$  – функція Хевісайда;  $\gamma = \frac{m}{ES}$ . Тобто функція  $u_3(x, t)$  враховує, що прискорення  $\beta(t)$  виникає тільки в момент пуску намотувального барабану.

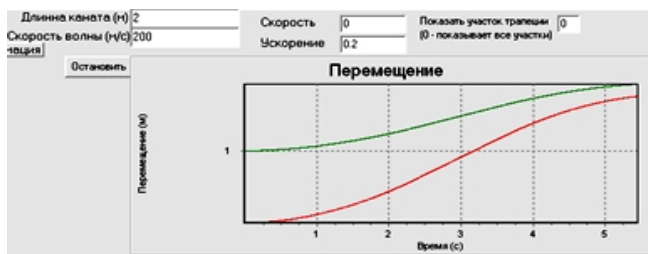
Розв'язок для кожної з функцій  $u_2(x, t)$  та  $u_3(x, t)$  шукається по аналогії із запропонованим методом в пункті 1 для функції  $u_1(x, t)$ .

В результаті, ми можемо побудувати динамічні поля переміщень та напруг для будь-якої точки канату, включаючи точку дотику каната з барабаном.

#### 4. Аналіз чисельних результатів

З метою зменшення капітальних затрат та скорочення строків зупинки при зношуванні сталевих канатів при підйомі вантажів ми чисельно визначили показники напружень в будь-яких момент часу роботи шахтної установки. Тобто подальша числова реалізація пошуку переміщення та напруження в канаті в точці дотику його з барабаном є досить чіткою та відповідає дійсним природнім умовам робочого використання подібних шахтних машин. Згладжена діаграма швидкості була отримана на основі аналізу експериментальних даних, отриманих в промислових умовах з використанням спеціалізованої вимірювальної апаратури.

Отже, за допомогою степенної інтерполяції знаходимо аналітичний вид функції переміщення точки дотику канату з барабаном, попередньо знайшовши відповідні дискретні значення оберненої функції до швидкості переміщення. Відобразимо згладжену діаграму швидкості, враховуючи чисельне побудову модифікованого методу відображення для відбитих хвиль.



Також відобразимо час і кількість відбитих хвиль від рухомого кінця каната. Для цього виберемо дві контрольні точки до початку намотування першу візьмемо умовно в центрі каната, а друга буде точкою дотику каната з барабаном. Наведемо порівняльну характеристику переміщення контрольних точок за весь період роботи підйомної установки, тобто. I-III швидкісні режими. Вибірково покажемо на II і III режимах взаємозалежність показників напруження контрольних точок. Отримана залежність дозволяє знаходити

максимальні і мінімальні значення напружень в будь-який момент часу, і заздалегідь передбачити ті перетини канату, в яких імовірна найбільша зношуваність.

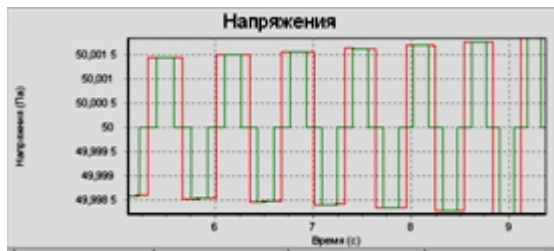


Рис. 3 – II етап

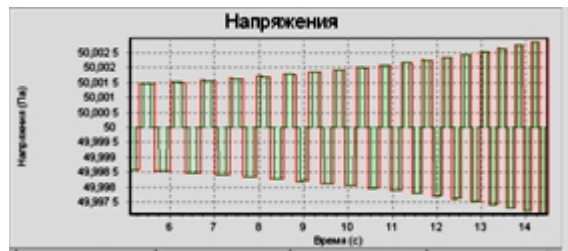


Рис. 4 – III етап

## Висновки

В даній роботі проведено дослідження динамічних задач, пов'язаних з позовжніми коливаннями канатів шахтних систем, що містять деформівні одномірні тіла (пружні канати, стержні, балки). Отримані результати можуть бути сформульовані у вигляді наступних тез:

1. Сформульовано задачу про динаміку підйомної установки з погляду зміни напружень в перетинах каната (пружного стержня) у часі. Встановлені закономірності впливу характеру відбитих хвиль від рухомого і нерухомого кінців пружної нитки, необхідні для оптимальної роботи підйомної системи.

2. Сформульовано задачу про коливання нитки, наділеною жорсткістю, за якою рухається складовий вантаж відповідно до динаміки підвісної дороги.

3. Досліджено закон переміщення незакріпленого верхнього кінця, з урахуванням крайових умов в початковій точці намотування каната; встановлено, що вертикальні коливання несучого каната є джерелом параметричних збурень напружень по всій довжині пружної нитки.

## Перелік використаних джерел:

1. Воеводин В. В. Численные методы в прикладном пакете sage / В. В. Воеводин. – Спб. : БХВ-Петербург, 2011. – 257 с.

2. Коряшкіна Л. С. Чисельні методи : навч. посіб. / Л. С. Коряшкіна, М. М. Одновол ; Нац. гірн. ун-т. – Д., 2007. – 220 с.

3. Ostapenko V. A. Dynamic field of displacements in rods of variable length. / V. A. Ostapenko // Proceedings of 8<sup>th</sup> International Conference on Dynamical Systems Theory and Applications. – Lodz, 2011. – P. 316–323.

*Зеленська Т.С.* «Крайова задача позовжніх коливань в канатах змінної довжини».

У статті розглянуто постановку крайової задачі для сталевго канату підйомної установки. Знайдено розв'язок початково-крайової задачі для пружної нитки, як області з рухомою границею. Представлено програмну реалізацію результатів впливу відображених хвиль на напруження в перетинах каната.

**Ключові слова:** переміщення, відображення, хвильове рівняння.

*Зеленская Т.С.* «Краевая задача продольных колебаний в канатах переменной длины».

В статье рассмотрена постановка краевой задачи для стального каната подъемной

установки. Найдено решение начально-краевой задачи для упругой нити, как области с подвижной границей. Представлена программная реализация результатов воздействия отраженных волн на напряжения в сечениях каната.

**Ключевые слова:** перемещения, отображение, волновое уравнение.

**Zelenskaya T.S.** “Initial-boundary problem of axial vibrations in ropes of variable length”.

Initial boundary value problem definition for a steel rope of lifting installation is considered in the article. The solution of initial-boundary problem for elastic filament as the area with mobile border is found. Program realization of results of influence of the reflected waves on stress in rope sections is presented.

**Key words:** displacements, reflection, wave equation.

Стаття надійшла до редакції 16 травня 2013 р.