УДК 519.6

Бабенко К.Є., Хапко Р.С.

Про метод граничних інтегральних рівнянь для наближеного розв’язування прямих задач EIT

1. Постановка задачі та зведення до граничних інтегральних рівнянь

Пряма задача електричної імпедансної томографії формулюється наступним чином. Нехай $D \subset \mathrm{R}^2$ - обмежена однозв’язна область з границею $\Gamma_0 \in C^2$. Необхідно знайти функцію $u : D \to \mathrm{R}$, яка задовольняє еліптичне рівняння зі змінними коефіцієнтами

$$Lu := \operatorname{div}(\sigma \nabla u) = 0 \quad \text{в} \quad D \tag{1}$$

і граничну умову Діріхле

$$u = f \quad \text{на} \ \Gamma_0. \tag{2}$$

Тут $\sigma \in C^\infty(D)$, $\sigma(x) > 0, x \in D$ і $f \in H^{1/2}(\Gamma_0)$ - задані функції.

Відомо [2], що задача (1), (2) має єдиний розв’язок $u \in H^1(D)$. Нехай в області D задано $N \in \mathrm{N}$ замкнених кривих $\Gamma_k \in C^2$, $k = 1,\ldots,N$, які не перетинаються. Позначимо $\Gamma = \bigcup\limits_{k=1}^{N} \Gamma_k$. Модифікуємо задачу (1.1), (1.2) до такої: для заданих σ і f знайти функцію $\widetilde{u} : \Gamma \to \mathrm{R}$, яка задовольняє рівняння (1) на Γ і граничну умову (2).

Функція Леві (параметрікс) диференціального оператора L має вигляд [2]

$$P(x,y) = \frac{\ln|x-y|}{2\pi\sigma(y)}, \quad x, y \in \mathrm{R}^2, x \neq y,$$

причому $L_x P(x,y) = \delta(x-y) + R(x,y)$, де

$$R(x,y) = \frac{(x-y)\cdot\nabla\sigma(x)}{2\pi\sigma(y)|x-y|^2}, \quad x, y \in \mathrm{R}^2, x \neq y.$$

Подамо розв’язок модифікованої задачі у вигляді суми потенціалів

$$\widetilde{u}(x) = \sum_{j=0}^{N} \int_{\Gamma_j} \varphi_j(y) P(x,y)\, ds(y), \quad x \in \Gamma,$$

де $\varphi_j : \Gamma_j \to R$ - невідомі густини. Зважаючи на властивості функції Леві, отримаємо систему граничних інтегральних рівнянь

$$\begin{cases} \varphi_k(x) + \sum\limits_{j=0}^{N} \int\limits_{\Gamma_j} \varphi_j(y) R(x,y)\, ds(y) = 0, \quad x \in \Gamma_k, k = 1,\ldots,N, \\ \sum\limits_{j=0}^{N} \int\limits_{\Gamma_j} \varphi_j(y) P(x,y)\, ds(y) = f(x), \quad x \in \Gamma_0. \end{cases} \tag{3}$$

Розв’язок модифікованої задачі можна шукати також у вигляді

$$\widetilde{u}(x) = \int_{\Gamma_0} \psi_0(y)\sigma(y) \frac{\partial P(x,y)}{\partial \nu(y)} ds(y) + \sum_{j=1}^{N} \int_{\Gamma_j} \psi_j(y) P(x,y)\, ds(y), \quad x \in \Gamma, \tag{4}$$

де густини $\psi_j : \Gamma_j \to R$ визначаються з такої системи граничних інтегральних рівнянь

$$\begin{cases} \psi_k(x) + \sum_{j=1}^{N} \int_{\Gamma_j} \psi_j(y) R(x,y) ds(y) + \int_{\Gamma_0} \psi_0(y)\sigma(y) \frac{\partial R(x,y)}{\partial \nu(y)} ds(y) = 0, x \in \Gamma_k, k = 1,\dots,N, \\ \frac{1}{2}\psi_0(x) + \sum_{j=0}^{N} \int_{\Gamma_j} \psi_j(y) P(x,y) ds(y) + \int_{\Gamma_0} \psi_0(y)\sigma(y) \frac{\partial P(x,y)}{\partial \nu(y)} ds(y) = f(x), \quad x \in \Gamma_0. \end{cases} \quad (5)$$

Зауважимо, що діагональні ядра в отриманих системах містять особливості типу Коші у рівняннях для $k = 1,\dots N$ і логарифмічну для $k = 0$. За допомогою теорії Рісса для операторних рівнянь другого роду з компактним оператором [4] не складає труднощів довести коректність інтегральних рівнянь.

Теорема 1. Для $f \in H^{1/2}(\Gamma_0)$ існує єдиний розв'язок системи інтегральних рівнянь (3) $\varphi_0 \in H^{-1/2}(\Gamma_0)$, $\varphi_j \in H^{1/2}(\Gamma_j)$, $j = 1,\dots,N$. Для $f \in H^{1/2}(\Gamma_0)$ існує єдиний розв'язок системи інтегральних рівнянь (5) $\psi_j \in H^{1/2}(\Gamma_j)$, $j = 0,\dots,N$.

2. Чисельне розв'язування інтегральних рівнянь

Оскільки процедура чисельного розв'язування системи (3) приведена в [1], то зупинимось більш детально на розв'язуванні системи інтегральних рівнянь (5). Нехай криві мають параметричні подання $\Gamma_k = \{x_k(t) = (x_{1k}(t), x_{2k}(t)), 0 \le t \le 2\pi\}$, $k = 0,\dots,N$,

де $x_k : \mathrm{R} \to \mathrm{R}^2$ - 2π-періодичні функції з $|x_k'(t)| > 0$ для всіх $t \in [0,2\pi]$ і $x_k \in C^2([0,2\pi]\times[0,2\pi])$. Зважаючи на це, систему (5) можна переписати в такому еквівалентному вигляді:

$$\mu_k(t) + \frac{1}{2\pi}\sum_{j=0}^{N}\int_0^{2\pi}\mu_j(\tau)K_{kj}(t,\tau)d\tau = g_k(t), \quad t \in [0,2\pi], k = 0,\dots,N, \quad (6)$$

де $\mu_k(t) = \psi_k(x_k(t))$, $g_0(t) = 2f(x_0(t))$, $g_k(t) = 0$, $K_{kj}(t,\tau) = 2\pi R(x_k(t), x_j(\tau))|x_j'(\tau)|$, $k, j = 1,\dots,N$, $K_{0j}(t,\tau) = 2\pi P(x_0(t), x_j(\tau))|x_j'(\tau)|$, $j = 1,\dots,N$,

$$K_{k0}(t,\tau) = -\frac{\nabla\sigma(x_k(t))\cdot\nu(x_0(\tau))|x_0'(\tau)|}{|x_k(t)-x_0(\tau)|^4} + \frac{2(x_k(t)-x_0(\tau))\cdot\nu(x_0(\tau))|x_0'(\tau)|\nabla\sigma(x_k(t))\cdot(x_k(t)-x_0(\tau))}{|x_k(t)-x_0(\tau)|^2\,\sigma(x_0(\tau))} -$$

$$\frac{\nabla\sigma(x_k(t))\cdot\nu(x_0(\tau))|x_0'(\tau)|\nabla\sigma(x_k(t))\cdot(x_k(t)-x_0(\tau))}{|x_k(t)-x_0(\tau)|^2\,\sigma(x_0(\tau))}, k = 1,\dots,N,$$

$$K_{00}(t,\tau) = 2|x_0'(\tau)|\left(\frac{(x_0(\tau)-x_0(t))\cdot\nu(x_0(\tau))}{|x_0(\tau)-x_0(t)|^2} - 2\pi\nabla\sigma(x_0(\tau))\cdot\nu(x_0(\tau))P(x_0(t),x_0(\tau))\right).$$

У діагональних ядрах K_{ll} наявні особливості, які виділимо у вигляді відповідних вагових функцій

$$K_{00}(t,\tau) = K_{00}^1(t,\tau)\ln\left(\frac{4}{e}\sin^2\frac{t-\tau}{2}\right) + K_{00}^2(t,\tau), \quad K_{ll}(t,\tau) = \cot\frac{\tau-t}{2}\widetilde{K}_{ll}(t,\tau), l \ne 0,$$

де $K_{00}^1(t,\tau) = -\dfrac{\nabla\sigma(x_0(\tau))\cdot\nu(x_0(\tau))|x_0'(\tau)|}{\sigma(x_0(\tau))}$, $K_{00}^2(t,\tau) = K_{00}(t,\tau) - K_{00}^1(t,\tau)\ln\left(\dfrac{4}{e}\sin^2\dfrac{t-\tau}{2}\right)$ і

$\widetilde{K}_{ll}(t,\tau) = \tan\dfrac{\tau-t}{2}K_{ll}(t,\tau)$ з діагональними виразами

$$K_{00}^2(t,t) = K_{00}^1(t,t)(2\ln|x_0'(t)|+1) - \frac{x_0''(t)\cdot\nu(x_0(t))}{|x_0'(t)|} \text{ і } \widetilde{K}_{ll}(t,t) = \frac{x_l'(t)\cdot\nabla\sigma(x_l(t))}{2\sigma(x_l(t))|x_l'(t)|}.$$

На рівновіддаленому поділі $t_j = \frac{j\pi}{M}, \quad j = 0,...,2M-1, \; M \in \mathrm{N}$ розглянемо квадратурні формули [3,4], які відповідають інтегралам у системі (4.1)

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\tau)d\tau \approx \frac{1}{2M}\sum_{j=0}^{2M-1} f(t_j),$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left\{\frac{4}{e}\sin^2\frac{t-\tau}{2}\right\} f(\tau)d\tau \approx \sum_{j=0}^{2M-1}\widetilde{R}_j(t) f(t_j),$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cot\frac{\tau-t}{2} f(\tau)d(\tau) \approx \sum_{j=0}^{2M-1}\widetilde{T}_j(t) f(t_j)$$

з відомими ваговими функціями $\widetilde{R}_j$ і $\widetilde{T}_j$ [3,4].

Наведені квадратури отримані шляхом заміни гладкої частини f інтеграндів на відповідний інтерполяційний поліном і подальше точне інтегрування. Зауважимо, що точність цих формул залежить від гладкості функції f.

Використання цих квадратур до інтегралів у системі (6) та колокація отриманих апроксимаційних рівнянь з використанням як точок колокації вузлів квадратурних формул приводить до системи лінійних рівнянь

$$\begin{pmatrix} A_{00} & A_{01} \cdots & A_{0N} \\ & \cdots & \\ A_{N0} & A_{N1} \cdots & A_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{\mu}_0 \\ \vdots \\ \widetilde{\mu}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_N \end{pmatrix} \tag{7}$$

з коефіцієнтами матриці

$$A_{0k}^{(ij)} = \begin{cases} \delta_{ij} + K_{00}^1(t_i,t_j)\widetilde{R}_j(t_i) + \dfrac{1}{2M}K_{00}^2(t_i,t_j), & k = 0, \\ \dfrac{1}{2M}K_{0k}(t_i,t_j), & k \neq 0, \end{cases} \qquad A_{kl}^{(ij)} = \begin{cases} \delta_{ij} + \widetilde{T}_j(t_i)\widetilde{K}_{kk}(t_i,t_j), & k = l \neq 0, \\ \dfrac{1}{2M}K_{kl}(t_i,t_j), & k \neq l, \end{cases}$$

правими частинами $b_k^{(i)} = g_k(t_i)$ і невідомими $\widetilde{\mu}_k = (\widetilde{\mu}_k^{(0)},\ldots,\widetilde{\mu}_k^{(2M-1)})$, де $\widetilde{\mu}_k^{(j)} \approx \mu_k(t_j)$.

Теорема 2. Для достатньо великого M система лінійних рівнянь (7) має єдиний розв'язок. Для $\Gamma_k \in C^\infty$, $0 \le q \le p$, $\frac{1}{2} < p$, $g_0 \in H^p[0,2\pi]$ і кожного $k = 0,\ldots,N$ справджуються оцінки похибок:

$$\left\|\mu_k - \widetilde{\mu}_k\right\|_q \le \frac{c_k}{M^{p-q}}, \quad c_k > 0.$$

Обчислення наближеного розв'язку модифікованої задачі здійснюється за формулою (4) з використанням відповідних квадратурних формул.

3. Чисельні експерименти

Нехай область D обмежена колом радіуса 2 (див. рис.1) $\Gamma_0 = \{x_0(t) = 2(\cos t, \sin t), t \in [0,2\pi]\}$, $\sigma(x) = 1 + \exp(0.3(x_1^2 + x_2))$, $x \in D$ і $f(x) = 1 + |x|^2$, $x \in \Gamma_0$. Множину кривих в області D вибирали як (див. рис. 1)

$$\Gamma_k = \{x_k(t) = 2(1 - k/(N+1))(\cos t, \sin t), 0 \le t \le 2\pi\}, \; k = 1,\ldots,N.$$

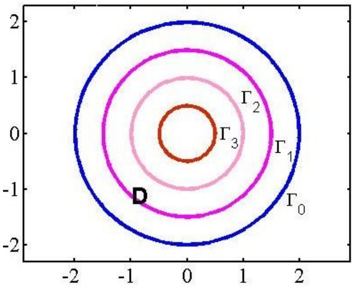

Рис.1

Табл.1 Порівняння чисельних експериментів

M	$\Vert \tilde{u}_N^{(1)} - \tilde{u}_N^{(2)} \Vert_{\Gamma,\infty}$	
	N=5	N=9
16	3.014E-01	6.278E-01
32	2.098E-03	1.388E-01
64	3.342E-08	3.736E-04
128	5.018E-14	9.766E-10

В табл. 1 подано порівняння чисельних результатів, отриманих шляхом використання систем інтегральних рівнянь (3) і (5) на сукупності кривих Γ.

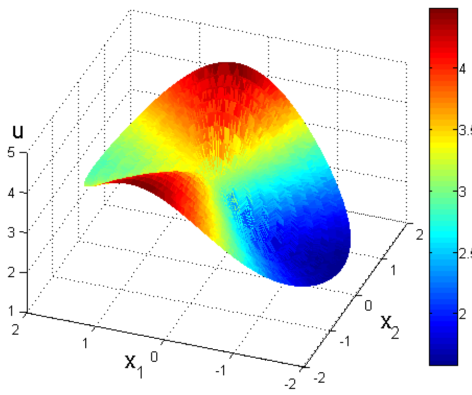

Рис.2а

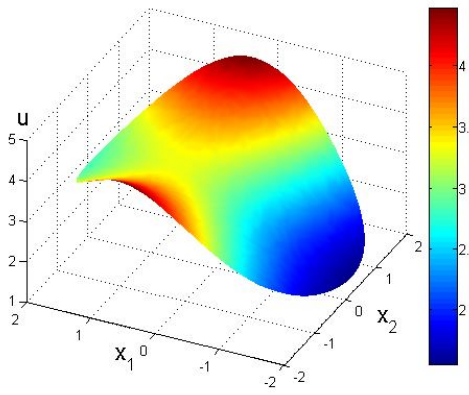

Рис.2б

На рис.2*а* приведено наближений розв'язок, отриманий методом граничних інтегральних рівнянь (система (5)) і на рис 2*б* – методом скінченних елементів, реалізованому в PDE Toolbox в середовищі Matlab. При обчисленнях методом інтегральних рівнянь було використано такі значення параметрів дискретизації $M = 64$ і $N = 9$. Для обчислення наближеного розв'язку задачі (1), (2) як на системі кривих Γ, так і в інших точках області D було використано подання (4). Як бачимо, пропонований метод дає можливість ефективно обчислювати наближений розв'язок прямої задачі EIT. Це дає підстави побудувати метод нелінійних інтегральних рівнянь для оберненої задачі EIT, що полягає у знаходженні функції σ в області D за відомими даними Коші на границі Γ_0.

ЛІТЕРАТУРА

1. Бабенко К., Хапко Р. Про чисельне розв'язування однієї прямої задачі EIT методом граничних інтегральних рівнянь // Вісник Львівського університету. Серія прикладна математика та інформатика. – 2012, 10с. (в друці).
2. Миранда К. Уравнения с частными производными эллиптического типа.- М.: Изд-во иностр. л-ры, 1957.- 256с.
3. Chapko R., Kress R. On a quadrature method for a logarithmic integral equation of the first // In Agarwal, ed.: World Scientific Series in Applicable Analysis.- Vol.2. Contributions in Numerical Mathematics. 1993.- P.127-140.
4. Kress R. Linear integral equations.- New York: Springer-Verlag, 1999.- 365p.