Писарцов О.С., Лазаренко В.І.

ВИВЧЕННЯ КОЛИВАЛЬНОГО РУХУ ЗА ДОПОМОГОЮ МАТЕМАТИЧНОГО МАЯТНИКА

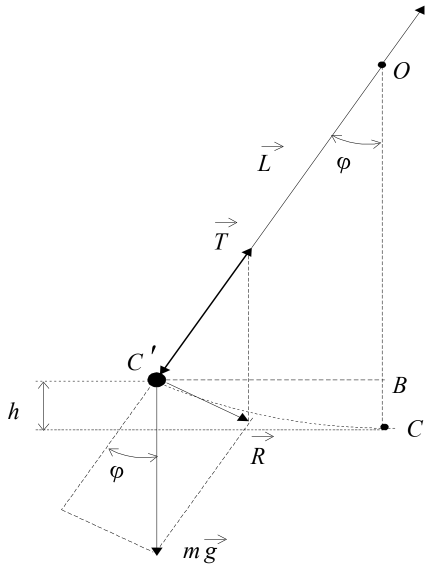

Рис. 1 – Математичний маятник

Маятник – тіло, що робить коливальний рух під дією квазіупружної сили. Найпростіший маятник – масивний вантаж на підвісі. Якщо підвіс нерозтяжний, розміри вантажу малі в порівнянні з довжиною підвісу й маса нитки мала в порівнянні з масою вантажу, то вантаж можна розглядати як матеріальну крапку, що перебуває на незмінній відстані *l* від крапки підвісу О. Такий маятник називається математичним. На маятник діють сили: натягу нитки $\vec{T}$ й ваги $m\vec{g}$, які в положенні рівноваги компенсують один одного $\vec{R} = \vec{T} + m\vec{g} = 0$. Для порушення коливань маятник виводимо із положення рівноваги. Тепер $\vec{R} \neq 0$ і маятник має надлишкову потенційну енергію *mgh* стосовно положення рівноваги. Ця енергія обумовлює коливання, що відбувається по окружності й описуване основним рівнянням динаміки обертового руху.

$$\vec{M} = J\vec{\varepsilon},$$

(1)

де $\vec{M}$ – результуючий обертаючий момент, $\vec{\varepsilon}$ - кутове прискорення, $J = ml^2$ – момент інерції кульки щодо осі OO', що проходить через крапку підвісу *O*, перпендикулярно площини коливань (площини креслення). Результуючий момент сили натягу нитки й сили ваги рівний $\vec{M} = \vec{M}_T + \vec{M}_g$

(2)

Тоді $J\vec{\varepsilon} = \vec{M}_T + \vec{M}_g$

(3)

Кут $\vec{\varphi}$ – вектор, спрямований від читача вглиб, тому що відлік кута ведеться за годинниковою стрілкою. Вектори $\vec{\varepsilon}, \vec{M}_T, \vec{M}_g$ спрямовані по осі обертання.

Проецируємо вираження (3) на вісь OO'. Приймемо за позитивний напрямок осі напрямок вектора $\vec{\varphi}$. Тоді $J\varepsilon = mgl \cdot \sin(\vec{L},^\wedge \vec{g}) + Tl \cdot \sin(\vec{T},^\wedge \vec{l})$,

(4)

де $\vec{L}$ – вектор крапки, модуль якого дорівнює довжині підвісу $\left|\vec{L}\right| = l$.

Очевидно, що кут $(\vec{L},^\wedge \vec{g}) = -\varphi$, а кут $(\vec{T},^\wedge \vec{L}) = 0$. Тоді $J\varepsilon = -mg \cdot \sin\varphi$

(5)

Або, тому що $\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$, $\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega_0^2 \cdot sin\,\varphi = 0$

(6)

Для досить малих кутів *sinφ≈φ*, тоді $\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega_0^2\varphi = 0$,

(7)

де $\omega_0^2 = g/l$. Розв'язок рівняння (7) являє собою гармонійну функцію, відповідну до гармонійного коливання: $\varphi = \varphi_0 \cos(\omega_0 t + \alpha_0)$,

(8)

Ми бачимо, що виявляється циклічною частотою цього коливання з періодом.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad (9)$$

Розв'язок рівняння (6) являє собою коливання з безупинно мінливою частотою, якої відповідає період

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2\frac{\varphi_0}{2} + \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)^2 \sin^4\frac{\varphi_0}{2} + \ldots\right]$$

(10)

Література:

1. Александров Н.В., Яшкин Л.Я. Курс общей физики. Механика. – М.: Просвещение, 1978.