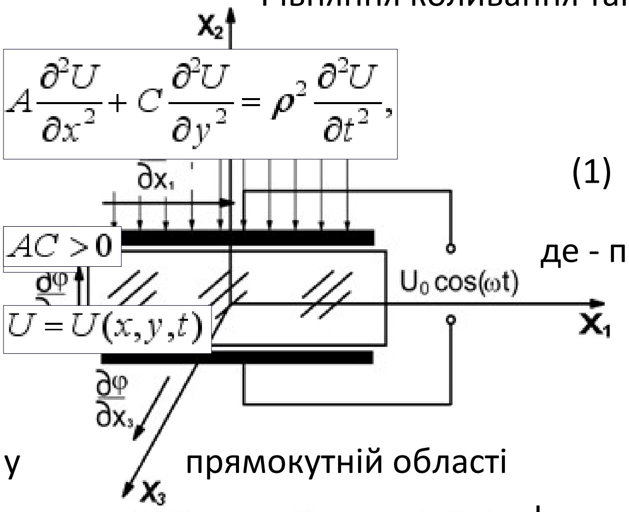
Лебідь А. Г. к. ф.-м. н. доц. каф. ЕМС,

Васильчук Д. П. ст. викладач каф. ЕКТСУ

ВИРІШЕННЯ ДВОВИМІРНОГО ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ КОЛИВАНЬ КВАРЦОВОЇ ПЛАСТИНИ В ПРЯМОКУТНІЙ ПЛОСКІЙ ОБЛАСТІ

У роботі представлена математична модель стану п’єзоелектрика з градієнтним полем збудження в площині кристалічного елементу.

Рівняння коливання такої пластини:



$$A\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+C\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=\rho^2\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \qquad (1)$$

де - позитивні постійні, причому $AC>0$.

Потрібно знайти його рішення

$$U=U(x,y,t) \qquad (2)$$

у прямокутній області

пластина

$$D:=\{(x,y)\,|\,|x|\le h,\,0\le y\le l\} \qquad (3)$$

що задовольняє наступним початковим і граничним умовам:

$$U(-x,y,t)=U(x,y,t),\,U(x,y,0)=\varphi(x,y),\,\frac{\partial^2 U(x,y,0)}{\partial y}=\psi(x,y), \qquad (4)$$

$$\frac{\partial U(\pm h,y,t)}{\partial x}=0;\;U(x,0,t)=0,\;\frac{\partial U(x,l,t)}{\partial y}=0\,. \qquad (5)$$

Рішення цієї задачі шукаємо у вигляді функціонального ряду:

$$U(x,y,t)=\frac{1}{2}A_o(y,t)+\sum_{n=1}^{\infty}A_n(y,t)\cos\frac{n\pi x}{h}$$

, (6)

коефіцієнти якого:

$$A_n(y,t)=\frac{2}{h}\int_0^h U(x,y,t)\cos\frac{n\pi x}{h}dx$$

(7)

вже задовольняє першому з граничних умов (5).

Після підстановки (6) в (1), застосування перетворення Лапласа і проведення ряду перетворень отримаємо формули для коефіцієнтів ряду (6):

$$A_n(y,t)=\frac{4p^2}{h}\int_{l-y}^{l}\int_0^h\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\sin\left(\mu_{n,k}\hat{y}\right)\cdot\cos\left(\mu_{n,k}(1-\hat{z})\right)\times\right.$$

$$\times\left(\frac{(-1)^k}{p^2 l}\varphi(x,\hat{z})\cos\left(q_{n,k}t/p\right)+\frac{\psi(x,\hat{z})\cdot\sin\left(q_{n,k}t/p\right)}{(-1)^k(plq_{n.k})}\right)\times\cos\frac{n\pi x}{h}dxd\hat{z}+$$

$$+\frac{4p^2}{h}\int_0^y\int_0^h\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\sin\left(\mu_{n,k}\hat{z}\right)\cdot\cos\left(\mu_{n,k}(1-\hat{y})\right)\times\right.$$

$$\times\left(\frac{(-1)^k}{p^2 l}\varphi(x,\hat{z})\cos\left(q_{n,k}t/p\right)+\frac{\psi(x,\hat{z})\cdot\sin\left(q_{n,k}t/p\right)}{(-1)^k(plq_{n,k})}\right)\times\cos\frac{n\pi x}{h}dxd\hat{z}.$$