Першина Ю.І.

НАБЛИЖЕННЯ РОЗРИВНИХ ФУНКЦІЙ ДВОХ ЗМІННИХ РОЗРИВНИМИ СПЛАЙНАМИ НА ПРЯМОКУТНІЙ СІТЦІ

Загальновідомими є результати теорії наближення функцій поліномами або сплайнами, які є неперервними або диференційованими до деякого порядку включно. В той же час практика вимагає уміння створювати математичні моделі внутрішньої структури 3D тіл в заданих площинах за умови, що функція $f(x,y)$, яка описує цю внутрішню структуру має розриви першого роду на деякій системі ліній.

В даній роботі вперше пропонується загальних підхід до побудови кусково-білінійних сплайнів, які можуть мати розриви першого роду на границях між прямокутними елементами зі сторонами, паралельними осям координат. Нехай в області $D=[0,1]^2$ задана розривна функція $f(x,y)$ та задане деяке розбиття на елементи (прямокутники) $\Pi_{i,j}=[x_i,x_{i+1}]\times[y_j,y_{j+1}]$, $0=x_0<x_1<...<x_m=1$, $0=y_0<y_1<...<y_n=1$. Вважаємо, що на кожному з відрізків, які є спільними для двох сусідніх прямокутників $\Pi_{i,j}$ та $\Pi_{i,j+1}$, або $\Pi_{i+1,j}$, або $\Pi_{i+1,j+1}$, функція $f(x,y)$ може мати розриви першого роду, причому в кожній точці (x_i,y_j) може бути задано чотири різних значення наближуваної функції.

$$f_{i,j}^{++}=\lim_{\substack{x\to x_i+0\\ y\to y_j+0}} f(x,y),\; f_{i,j}^{-+}=\lim_{\substack{x\to x_i-0\\ y\to y_j+0}} f(x,y),\; f_{i,j}^{+-}=\lim_{\substack{x\to x_i+0\\ y\to y_j-0}} f(x,y),$$

$$f_{i,j}^{--}=\lim_{\substack{x\to x_i-0\\ y\to y_j-0}} f(x,y).$$

Побудуємо за допомогою вказаної інформації в кожному з елементів Π_{ij} інтерполяційний білінійний поліном у вигляді:

$$p_{ij}(x,y)=C_{i,j}^{++}\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\frac{y-y_{j+1}}{y_j-y_{j+1}}+C_{i+1,j}^{-+}\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\frac{y-y_{j+1}}{y_j-y_{j+1}}+C_{i,j+1}^{+-}\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\frac{y-y_j}{y_{j+1}-y_j}+$$

$$+C_{i+1,j+1}^{--}\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\frac{y-y_j}{y_{j+1}-y_j},\; i=\overline{1,m},\;\; j=\overline{1,n}.$$

Лема. Функція $s(x,y)=p_{ij}(x,y),\,(x,y)\in\Pi_{ij}\subset D$ є розривним сплайном білінійним в кожному з елементів розбиття з наступними властивостями:

$$\lim_{x\to x_{i+1}-0} s(x,y) = p_{ij}(x_{i+1},y),\ \lim_{x\to x_i+0} s(x,y) = p_{ij}(x_i,y)\ ,$$

$$\lim_{y\to y_{i+1}-0} s(x,y) = p_{ij}(x,y_{j+1}),\ \lim_{y\to y_j+0} s(x,y) = p_{ij}(x,y_j),\ (x,y)\in \Pi_{i,j}\ .$$

Якщо $C_{i,j}^{++} = C_{i,j}^{-+}, C_{i,j+1}^{+-} = C_{i,j+1}^{--}$, то на лінії $x = x_i$ сплайн $s(x,y)$ є неперервною функцією для кожного $y,\ y_j \le y \le y_{j+1}$. Якщо ж для всіх точок (x_i, y_j) виконуються рівності $C_{i,j}^{++} = C_{i,j}^{-+} = C_{i,j}^{+-} = C_{i,j}^{--} = C_{i,j},\ i = \overline{1,m-1},\ j = \overline{n-1}$, то $s(x,y)\in C(D)$ і буде класичним білінійним сплайном на вказаній сітці вузлів.

Для знаходження невідомих $C_{i,j}^{++}, C_{i,j}^{-+}, C_{i,j+1}^{+-}, C_{i,j+1}^{--}$ в даній роботі пропонується використовувати метод найменших квадратів.