Литвин О.М., Литвин О.О., Денисова О.І.

$C^1(D)$

ЯВНІ ФОРМУЛИ ДЛЯ КУБІЧНИХ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИХ СПЛАЙНІВ КЛАСУ НА ТРИАНГУЛЬОВАНІЙ СІТЦІ ВУЗЛІВ

В роботі наведені явні аналітичні вирази для побудови системи неперервно диференційовних сплайнів третього степеня, що інтерполюють задану функцію та перші частинні похідні у вершинах трикутників розбиття заданої області і функцію у центрах цих трикутників. Тобто, дано аналітичне представлення розв’язку систем М.Зламала і А.Женішека [1-11].

З математичної точки зору задача зводиться до явного аналітичного розв’язання твердження наступної теореми.

$D_{ijk} = P_i P_j P_k \subset D$

Теорема 1. [1] Для кожної функції , функція , яка у кожному трикутнику розбиття області на трикутники, є поліномом

$$p_{ijk}(x,y) = a_{00}^{ijk} + a_{10}^{ijk}x + a_{01}^{ijk}y + a_{20}^{ijk}x^2 + a_{11}^{ijk}xy + a_{02}^{ijk}y^2 + a_{30}^{ijk}x^3 + a_{21}^{ijk}x^2y + a_{12}^{ijk}xy^2 + a_{03}^{ijk}y^3$$

третього степеня з властивостями

$$p_{ijk}(x_i,y_i) = f(x_i,y_i) = f_i,\ p_{ijk}(x_j,y_j) = f(x_j,y_j) = f_j,\ p_{ijk}(x_k,y_k) = f(x_k,y_k) = f_k$$
$$p_{ijk}^{(1,0)}(x_i,y_i) = f^{(1,0)}(x_i,y_i) = f_i^{(1,0)},\ p_{ijk}^{(1,0)}(x_j,y_j) = f^{(1,0)}(x_j,y_j) = f_j^{(1,0)},$$

$$p_{ijk}^{(1,0)}(x_k,y_k) = f^{(1,0)}(x_k,y_k) = f_k^{(1,0)},$$
$$p_{ijk}^{(0,1)}(x_i,y_i) = f^{(0,1)}(x_i,y_i) = f_i^{(0,1)},\ p_{ijk}^{(0,1)}(x_j,y_j) = f^{(0,1)}(x_j,y_j) = f_j^{(0,1)},$$

(1)

$$p_{ijk}^{(0,1)}(x_k, y_k) = f^{(0,1)}(x_k, y_k) = f_k^{(0,1)},$$
$$p_{ijk}\left(\frac{x_i + x_j + x_k}{3}, \frac{y_i + y_j + y_k}{3}\right) = f\left(\frac{x_i + x_j + x_k}{3}, \frac{y_i + y_j + y_k}{3}\right) = f_m^{ijk}$$

$$s(x, y) \in C^1(D) a$$

належить до класу диференційовних функцій: .

$$w_{p,q}(x_r, y_r) \neq 0 \quad r \in \{1, 2, \ldots, M\}$$

Тобто, для знаходження невідомих потрібно розв'язати десять СЛАР, які складаються з десяти рівнянь (1). Нижче наведемо явні розв'язки цих десяти систем з десятьма невідомими. Введемо до розгляду систему функцій двох змінних   які вважаємо визначеними лише в трикутнику з вершинами , що задовольняють умові

$$w_{p,q}(x, y) = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_p & y_p & 1 \\ x_q & y_q & 1 \end{vmatrix} = (y - y_p)(x_q - x_p) - (y_q - y_p)(x - x_p)$$

$$h_{p,q,r}(x, y) = \prod_{(i,j) \in Y_{p,q,r}} \frac{w_{i,j}(x, y)}{w_{i,j}(\bar{x}, \bar{y})},\ Y_{p,q,r} = \{(i, j) : (i, j) \in \{(p, q), (q, r), (r, p)\}\}$$

.

$$h_{p,q,r}(x, y)$$

Лема 1. Функція має наступні властивості

$$h_{p,q,r}(\bar{x}, \bar{y}) = 1,\ D^{\gamma} h_{p,q,r}(x_i, y_i) = 0,\ 0 \leq |\gamma| \leq 1,\ i \in \{p, q, r\},$$

$$\gamma = (\gamma_1, \gamma_2),\ |\gamma| = \gamma_1 + \gamma_2,\ D^{\gamma} = \frac{\partial^{|\gamma|}}{\partial x^{\gamma_1} \partial y^{\gamma_2}},\ D^0 h_{p,q,r} = h_{p,q,r}.$$

Введемо також наступні функції

$$k, p, q \in \{1,2,3\},\ k \neq p \neq q,\ \beta! = \beta_1!\beta_2!$$

$$H_{k,\beta}(x,y) = \frac{(x-x_k)^{\beta_1}(y-y_k)^{\beta_2}}{\beta!} w_{pq}^2(x,y) \left\{ \frac{1}{w_{pq}^2(x,y)} \right\}_{(x_k,y_k)}^{1-|\beta|};$$

де

$$\left\{ \frac{1}{u_{pq}(x,y)} \right\}_{(x_k,y_k)}^{1-|\beta|} = \sum_{0 \le |\gamma| \le 1-|\beta|} \left(D^{\gamma} \frac{1}{u_{pq}(x,y)} \right)_{(x_k,y_k)} \frac{(x-x_k)^{\gamma_1}(y-y_k)^{\gamma_2}}{\gamma!},\ \gamma! = \gamma_1!\gamma_2!$$

$$H_{k,\beta}(x_r, y_r) = \delta_{k,r}\delta_{0,|\beta|}; k, r \in \{1,2,3\},$$

Лема 2. Функції є поліномами третього степеня від двох змінних з властивостями

$$D^{\gamma} H_{k,\beta}(x_r, y_r) = \delta_{k,r}\delta_{\gamma_1,\beta_1}\delta_{\gamma_2,\beta_2},\ 0 \le |\gamma| \le 1,\ \gamma = (\gamma_1, \gamma_2),\ |\gamma| = \gamma_1 + \gamma_2.$$

Теорема 1. Оператор

$$z = \sum_{k=1}^{3} \sum_{0 \le |\beta| \le 1} D^{\beta} f(x,y)\Big|_{(x_k,y_k)} h_{k,\beta}(\bar{x},\bar{y})$$

$${}_{,\beta}(x,y) + \left(f(\bar{x},\bar{y}) - z\right)\bar{h}(x,y),$$

$$f(x,y) \in C^1(\overline{T})$$

ставить у відповідність функції поліном 3-го степеня від 2-ох змінних з властивостями

$$Of(\bar{x},\bar{y}) = f(\bar{x},\bar{y})$$

(2)

$$D^{\gamma} Of(x,y)\Big|_{(x_i,y_i)} = D^{\gamma} f(x,y)\Big|_{(x_i,y_i)},\ 0 \le |\gamma| \le 1,\ i = p,q,r$$

(3)

Література:

Zlamal M. On the finite element method. Numer. math. 12, 1968.- PP. 394-409