Трыков Д.

ЗАДАЧА НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ ЭЛЕКТРОН В ПОСТОЯННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Вначале с классической (а не квантовой) точки зрения рассмотрим движение электрона в постоянном магнитном поле с величиной магнитной индукцией равной $\vec{B}$. Тогда функцию Лагранжа в гауссовой системе единиц для нерелятивистского электрона массой m и с отрицательным зарядом $q=-e$, ($e>0$ – величина элементарного заряда), который движется в постоянном магнитном поле $\vec{B}=(0,0,B)$, направленном вдоль z -оси, как известно (см., например, книгу [1] , стр. 69), можно записать в виде

$$L(x_1,x_2,x_3,\dot{x}_1,\dot{x}_2,\dot{x}_3)=\frac{m}{2}\left(\dot{x}_1{}^2+\dot{x}_2{}^2+\dot{x}_3{}^2\right)-\frac{eB}{2c}\left(x_1\dot{x}_2-x_2\dot{x}_1\right). \qquad (1)$$

Здесь положение электрона определяется радиусом-вектором

$$\vec{r}(t)=x_1(t)\vec{i}+x_2(t)\vec{j}+x_3(t)\vec{k} \qquad (2)$$

относительно некоторой декартовой системы координат с единичными ортогональными векторами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, а, соответственно, компоненты скорости электрона равны производным $\vec{\upsilon}(t)=\dot{x}_1(t)\vec{i}+\dot{x}_2(t)\vec{j}+\dot{x}_3(t)\vec{k}$ и c есть скорость света, а магнитное поле направлено вдоль вектора $\vec{k}$, то есть z -оси.

С помощью известного преобразования Лежандра (см., например, [2]) от функции Лагранжа (1) переходим к функции Гамильтона и получаем

$$H(x_1,x_2,x_3,p_1,p_2,p_3)=\frac{1}{2m}\left(p_1{}^2+p_2{}^2+p_3{}^2\right)+\omega(x_1p_2-x_2p_1)+\frac{m\omega^2}{2}\left(x_1{}^2+x_2{}^2\right) \qquad (3)$$

которая приводит к следующим уравнениям движения

$$\frac{dx_i}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_i},\quad \frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x_i},\ (i=1,2,3), \qquad (4)$$

где введена так называемая частота Лармора

$$\omega=\frac{eB}{2mc}. \qquad (5)$$

Для нахождения решений системы уравнений (4) выполним следующее каноническое преобразование [3]

$$\begin{cases} Q_{1,2}=\frac{1}{2}\left(\pm ix_1\pm p_1+x_2-ip_2\right), \\ P_{1,2}=\frac{1}{2}\left(\mp ix_1\pm p_1+x_2-ip_2\right) \end{cases} \qquad (6)$$

в которых классическая функция Гамильтона принимает очень простой вид

$$H(Q_1,Q_2,P_1,P_2)=2iQ_2P_2. \qquad (7)$$

Сделав известные подстановки для замены классических выражений импульса на их квантовые аналоги

$$p_1\to\hat{p}_1=-i\hbar\frac{\partial}{\partial x_1},\quad p_2\to\hat{p}_2=-i\hbar\frac{\partial}{\partial x_2} \qquad (8)$$

в классических формулах (6), получаем следующий квантовый аналог функции Гамильтона (7) – дифференциальный оператор Шредингера

$$\hat{H}=2\hbar\omega(\hat{Q}_2\hat{P}_2+1/2), \qquad (9)$$

где $\hbar$ – постоянная Планка. Введенные дифференциальные операторы имеют следующие правила коммутации

$$[P_\nu,Q_\mu]\equiv P_\nu Q_\mu-Q_\mu P_\nu=\delta_{\nu\mu},\ (\nu,\mu=1,2). \qquad (10)$$

В результате получаем уравнение на собственные значения в системе электрон в постоянном магнитном поле

$$\hat{H}\psi=E\psi. \qquad (11)$$

Можно убедиться прямыми вычислениями, что в полярных координатах (r,φ) функции

$$\psi_{NL}(r,\varphi)=\frac{i^N e^{-iL\varphi}}{L!\sqrt{2\pi}}\left[2\left(\frac{N+L}{2}\right)!/\left(\frac{N-L}{2}\right)!\right]^{1/2} r^{|L|}\exp\left(r^2/2\right)M(a,b;r^2), \qquad (12)$$

где $a=-(N-L)/2$, $b=|L|+1$, $M(a,b;r^2)$ – известная функция Куммера,

являются собственными функциями задачи (11), а соответствующие собственные значения определяются формулой

$$E=\frac{eB\hbar}{mc}\left(n+\frac{|L|-L+1}{2}\right), \qquad (13)$$

которую можно переписать как

$$E = \frac{eB\hbar}{mc}\left(n_2 + \frac{1}{2}\right), \qquad (14)$$

где $n_2 = 0,1,2,3,\dots$, которые дают решения поставленной задачи.

Литература:

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. – М.: Наука, 1967. – 460с.

2. Трофимов В.В., Фоменко А.Т Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых дифференциальных уравнений. - М.: Факториал, 1995. – 448с.

3. Чеканов Н.А. Квантование нормальной формы Биркгофа-Густавсона. Ядерная физика. 1989. – Том 50. –Вып.8. – С.344-346.

Работа выполнена под. руководством ст. преп. кафедры ВПМ Чекановой Н.Н.