Сукач М., Подмарков О.

ОРТОГОНАЛЬНІ СИСТЕМИ ФУНКЦІЙ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ В МАТЕМАТИЧНОМУ МОДЕЛЮВАННІ

Ортогональні системи функцій і, зокрема, сплайн – функції - це розділ теорії наближення функцій і чисельного аналізу, який швидко розвивається [1-4]. Вони широко використовуються в обчислювальній математиці і інженерній практиці.

Визначальна роль сплайнів в теорії наближення функцій привела до появи великої кількості публікацій, присвячених сплайнам. Серед ортогональних кусково-лінійних сплайнів найбільш відомою є система лінійних сплайнів Франкліна, яка отримується застосуванням процесу ортогоналізації Шмідта на відрізку [0,1] до системи Фабера – Шаудера, побудованої за допомогою множини двоїчно раціональних точок відрізку [0,1]; в цьому випадку система Фабера – Шаудера з точністю до сталих множників збігається з системою $\left\{1, \int_0^1 \chi_n(x)dx\right\}$, де $\{\chi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ є системою Хаара. Ортонормована система неперервних функцій Франкліна не має явного виразу для елементів системи, як це є в ортогональних системах Хаара, Уолша і Радемахера для кусково-сталих сплайнів.Не зважаючи на це, залишається відкритим питання про побудову і використання сплайнів, ортогональних на заданому відрізку. Відомий ряд робіт, присвячених цій тематиці. В роботі [2] побудовані ортогональні на відрізку [-1,1] сплайни степеня n , які мають розривну похідну $k+1$-го порядку

$$P_{n,k}(x)=\frac{(n+k)!}{(2n)!}\frac{1}{x^k}\frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}\left[x^{n+k}\left(|x|-1\right)^{n-k}\right],\ k=\overline{0,n-1}.$$

В роботах [3-4] запропонований алгоритм побудови ортогональних на відрізку [-1,1] сплайнів та досліджено деякі їх властивості.

В роботі [3] розглядається загальний метод побудови неперервних ортогональних сплайнів

$$\overline{P}_{n,m}(t)=P_{n,-1+\frac{2(k-1)}{m},-1+\frac{2k}{m}}(t),\ t\in\left[-1+2(k-1)/m,-1+2k/m\right],\ \ k=\overline{1,m},\ \ n=2n',n'\in N,$$

$$\overline{P}_{n,m}(t)=(-1)^{k-1}P_{n,-1+\frac{2(k-1)}{m},-1+\frac{2k}{m}}(t),\ t\in\left[-1+2(k-1)/m,-1+2k/m\right],\ k=\overline{1,m},\ n=2n'-1,\ n'\in N.$$

n -го порядку на рівномірній сітці $x_k=-1+2k/m,\ k=\overline{0,m}$. В основі їх побудови лежать поліноми Лежандра $P_n(x)=\frac{(-1)^n}{n!2^n}\frac{d^n}{dx^n}\left[\left(1-x^2\right)^n\right],\ n=0,1,\ldots$, які є ортогональними на відрізку $[-1,1]$.

Наближення функцій скінченними сумами цих сплайнів здійснюється за формулами

$$S_{n,m}f(x)=\sum_{k=0}^{m}C_k(f)P_{n,k}(x),\ \ C_k(f)=\left(f,P_{n,k}\right)=\int_{-1}^{1}f(x)P_{n,k}(x)dx.$$

У роботі [4] побудовані інтерполяційні сплвйни перщого степеня на нерівномірній сітці, ортогональні на відрізку [-1,1], і досліджено якість наближення функцій за їх допомогою.

Проблема побудови систем ортогональних сплайнів та математичних моделей на їх основі є досить актуальною, та продовжує досліджуватись ще й досі.

1. Качмаж С., Штейнгауз Г. Теория ортогональных рядов. М, 1958.

2. Литвин О.М., Паршин В.В. О приближении функций, существенно принадлежащих классу $C^k[-1,1]$ // Докл. АН УССР. Сер. А.1971. №9 . С. 21-23.

3. О.М. Литвин, Л.С. Лобанова. Ортогональні сплайни класу $C[-1,1]$ // Доп. АН України.-1997.-№1.-

С.32-33.

4. О.М. Литвин, Л.С. Лобанова. Математичне моделювання процесів за допомогою інтерполяційних сплайнів, ортогональних на відрізку [-1,1]// Искусственный интеллект. 2011.-№3.-С.254-280.

Робота виконана під керівництвом пр.-проф. кафедри ВПМ Лобанової Л.С.